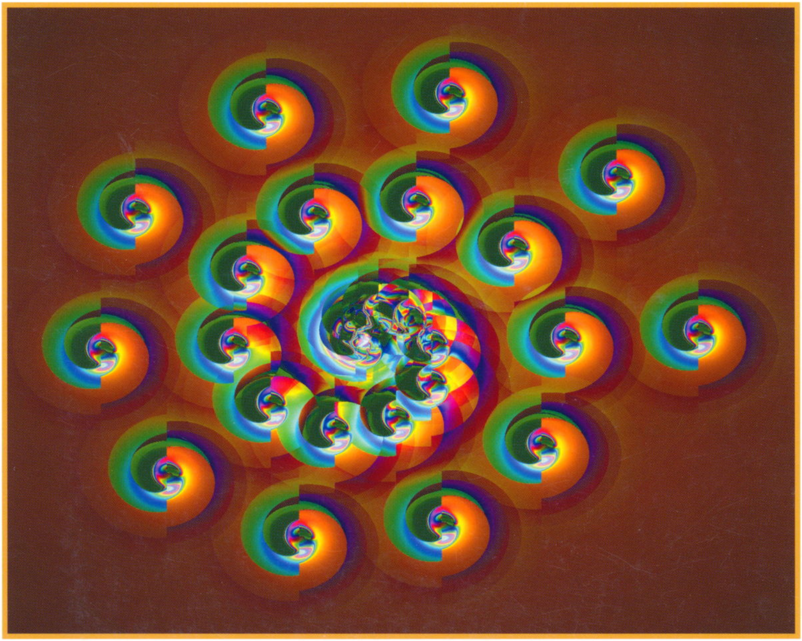
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2006年4月1日発行　第44巻4号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

4
2006

特集 「空間」とは何か
物理と数学から眺めた多彩な群像



No.514

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 514 April 2006

「空間」とは何か

物理と数学から眺めた多彩な群像

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，1年間（本誌＋別冊2冊）14,500円，半年間（本誌のみ）5,500円，半年間（本誌＋別冊1冊）7,250円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2002 年/12 省略

- 2003 年/1 保存則とは何か
- /2 素粒子的宇宙論の新展開
- /3 量子力学とカオス
- /4 〈波〉の魅力と数理
- 別冊 量子情報科学とその展開
- /5 〈質量〉とは何か
- /6 トポロジーの新世紀
- /7 $\hbar$ の世界
- /8 虚数のプロフィル
- /9 差分学の世紀
- /10 アインシュタインの物理学的世界観
- 別冊 現代数理物理の展開
- /11 量子情報科学の新時代
- /12 エネルギーとは何か
- 2004 年/1 ブレーンワールド新展開
- /2 幾何学的物理観
- /3 統計科学の最前線
- /4 演算子・作用素の魅力
- 別冊 微積分の広がり
- /5 現代物理学の進展
- /6 量子アルゴリズムの新地平
- /7 時間の矢とは
- /8 古典力学の新展開
- /9 可換から非可換へ
- /10 マクロ世界の量子論
- 別冊 時間論の諸パラダイム
- /11 符号化理論の新時代
- /12 素粒子物理学の未解決問題
- 2005 年/1 素数の魅力と不思議
- /2 エンタングルメント理論とその展開
- /3 最新 脳の数学理論
- /4 量子重力理論最前線
- 別冊 相対論の歩み
- /5 ベクトル
- /6 物理法則と方程式
- /7 量子異常とは何か
- /8 モジュライの広がり
- /9 対称性とは何か
- /10 不確定性原理の新展開
- 別冊 スーパーストリング
- /11 0 の発見
- /12 現代代数学への誘い
- 2006 年/1 偶然から必然へ
- /2 物理法則の直観的理解
- /3 〈強い力〉

数理科学臨時別冊一覧

- 05 年/1 情報理論の基礎
- 05 年/3 複素ニューラルネットワーク
- 05 年/5 マクスウェル方程式
- 05 年/6 制御理論講義
- 05 年/7 バイオインフォマティクスの基礎
- 05 年/9 トポロジー入門
- 05 年/11 アルゴリズムと計算量
- 05 年/12 ゲーム理論のフロンティア
- 06 年/1 ゲージ場の量子論入門
- 06 年/3 現代物理のための解析力学

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

- 紀伊國屋書店本店（新宿）
- 紀伊國屋書店新宿南店
- あおい書店中野本店
- オリオン書房ノルテ店（立川）
- くまざわ書店本店（八王子）
- くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
- 書泉グランデ（神田）
- 書泉ブックタワー（秋葉原）
- 三省堂本店（神田）
- ブックファースト渋谷店
- リブロ池袋店
- ジュンク堂書店（池袋）
- ジュンク堂書店（新宿）
- 芳林堂（高田馬場）
- 八重洲ブックセンター（東京駅前）
- 丸善丸の内本店（東京駅前）
- ブックファースト青葉台店（横浜）
- 栄松堂ジョイナス店（横浜）
- 有隣堂イセザキ町店（横浜）
- 有隣堂西口・東口（横浜）
- 有隣堂厚木店（厚木）
- 文教堂ブックセンター（川崎）

- 旭屋船橋店
- 戸田書店静岡本店
- ジュンク堂大阪本店
- 紀伊國屋書店梅田店（大阪）
- 旭屋本店（大阪）
- アバンティブックセンター（京都）
- ジュンク堂書店（京都）
- ジュンク堂書店（神戸）
- ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
- ジュンク堂書店（大分）
- 喜久屋書店倉敷店
- 紀伊國屋書店松山店
- 紀伊國屋書店福岡店
- 紀伊國屋書店福岡本店
- ジュンク堂福岡店
- 紀伊國屋書店新潟店
- 旭屋札幌店
- 金港堂（仙台）
- 金港堂パーク店（仙台）
- ジュンク堂書店（仙台）
- 鹿島ブックセンター（いわき）
- 友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

- 東京大学 本郷・駒場
- 東京工業大学 大岡山・長津田
- 東京理科大学 新宿
- 早稲田大学 理工学部
- 慶応義塾大学 矢上台
- 電気通信大学・福井大学
- 筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
- 埼玉大学
- 名古屋工業大学・愛知教育大学
- 大阪大学・神戸大学 ランス
- 京都大学・九州工業大学
- 東北大学 理薬・工学
- 室蘭工業大学
- 徳島大学 常三島
- 愛媛大学 城北
- 山形大学 小白川
- 島根大学
- 学習院大学 成文堂
- 北海道大学 クラーク店

April 2006 MATHEMATICAL SCIENCES Number 514

特集／「空間」とは何か

私たちを取り巻く「空間」

砂田 利一

読者諸兄は，この論説が空間についての新しい知見を含んでいることを期待するかもしれない．もしそうであるなら，残念ながらその期待には応えられない．ここで述べようとしていることは，ユークリッドの「原論」からアインシュタインの一般相対論に至る歴史の中で展開された空間概念の理解の深化であり，21 世紀に期待される空間概念の「変革」については，(もしそれがあるとしても) 筆者の非才により一切触れないからである．また，本特集のキー・ワードである「空間」は，それぞれの論説を一瞥すれば理解されるように，極めて多岐に渡る意味を有する用語であり，一括りにして論じることはできない．ここで述べるのはまさにタイトル通りの「素朴」な意味の空間概念である．

1. ユークリッド空間

ジョルダーノ・ブルーノ (1548–1600) は，「宇宙は無限に広がり，どこにも特別な中心はない」と主張し，これがキリスト教の教義に反するとして厳しい異端審問にかけられ，残虐な幽閉・拷問の後，火炙りの刑になった．アリストテレスの思想がトマス・アクィナス (1225–1274) によりキリスト教神学のもとに体系づけられ，当時は「宇宙は球体であり，その中心に地球がある」というアリストテレスの宇宙観がプトレマイオスの天動説とともに絶対不動の真理と考えられていたからである．

イタリア・ルネサンスの最後の形而上学者といわれるブルーノの宇宙観は，「無限な一者」である神が有限な宇宙を創造するはずがないという思弁により導かれたものであるが，その時代を遡ること約 2000 年前，古代ギリシャで既に完成していた幾何学は，ブルーノの主張を支持する確固たる「空間モデル」を与えていた．それは，万人周知のユークリッド幾何学である．

ユークリッド (前 300 年頃) は，古代ギリシャの幾何学の集大成として「原論」13 巻を著した．「原論」は，5 つの公準系を大前提として，図形の性質を一つ一つ検証していく理論体系を採っているが，この理論の背景にあるのが今日ユークリッド空間と呼ぶ「空間モデル」なのである．もちろん，後にデカルトが不満を漏らしたように，原論は発見の経緯と動機は一切省き，淡々と図形の性質を導いていくだけで，空間モデルを表立って明示いるわけではないし，一つの宇宙観を提示しているわけでもない．幾何学が空間モデルと同義語であることは，2000 年以上にわたる数学者の「努力」の末に理解されたことであり，宇宙観が空間モデルと関連することも，19 世紀になって複数の空間モデルが存在することが認識されて初めて理解されたことだからである．

歴史に「後付け」の説明を与えることは危険なことは重々承知しつつ，ユークリッドが原論で陰に採用したモデルを考えてみよう．基本図形である点や直線についての性質のほかに，ユークリッドは次の2つを空間の基本的性質としている．

(1) 空間は「等方・等質」である．

(2) 空間は「平坦」である．

(1) は，空間のどの方向にも，どの場所にもまったく違いがないことを意味している．原論は，このことについて陽に言明しているわけではないが，「図形の移動」（合同変換）を任意の方向と任意の場所に自由に行うことができるという形で，暗に (1) を仮定しているのである．これが「宇宙には中心がない」というブルーノの主張と一致していることは誰もが認めることであろう．

(2) は，上で述べた「2000年以上にわたる数学者の努力の末に理解されたこと」に関連する．原論の公準系の最後の公準（第5公準）は「2つの直線に交わる1つの直線が，その同じ側の内角の和を2直角より小さくするとき，2つの直線はその側に限りなく延長することにより必ず交わる」ことを主張する．この公準は，原論が書かれた当初から大きな議論を引き起こした．と言うのも，第5公準の表現が他の公準と較べて複雑だったことと，他の公準が作図における定規とコンパスの機能を説明しているのと異なって，有界な範囲で作図による検証が不可能な表現になっていたからである．

ユークリッドが，彼の幾何学理論の大前提としてこの複雑な公準を採用した経緯は分からない．むしろ，「三角形の2辺の和は他の1辺より大きい」（三角不等式）という「当たり前」の命題のほうが公準としてはふさわしいように見える．しかし，ユークリッドは三角不等式には証明を与え，さらに第5公準の逆が成り立つことも証明しているのである．

ユークリッドの「選択」が慧眼の一語につきることが数学者により理解されたのは，19世紀にガウス，ボヤイ，ロバチェフスキーが独立に第5公準を満たさない幾何学（非ユークリッド幾何学）を矛盾なく構築できることを示したときである．というのも，19世紀までの二千数百年間，数学者は第5公準は証明可能と考え（すなわち，現代的観点から言えば，空間の等方・等質性から平坦性が結論されると考え），それを「証明」しようと努力したのだが，実は「証明」は不可能であり，原論に展開された幾何学には必須な公準であることが分かったからである．

現代数学は，このような長い歴史を背に負いながら，ユークリッド空間の定義をほんの数行で済ませる．すなわち，「ユークリッド空間とは，計量線形空間（内積を有する線形空間）をモデルとするアフィン空間のことである」とするのである．しかし，この素気ない定義に数学者の努力が凝縮していることを理解しなければならない．

2. 非ユークリッド空間

ガウス（1777–1855）は，当時一世を風靡していたカント哲学の権威を恐れ，空間の認識に大変革を迫り得る「新しい幾何学」の発表を躊躇した．カントは，「経験の世界は個人を超えた主観の形式としての時間，空間，カテゴリーによって形成される」として，我々を取り巻く空間が，ユークリッド幾何学が行われる空間であることを基礎にして彼の哲学を展開していたからである．

公には表明しなかったものの，ガウスは第5公準が「空間が平坦である」という主張と同義であることを見定めた．それは次のように説明される．「新しい幾何学」の発見前夜，ルジャンドルが第5公準の「証明」を企てたとき，その副産物として第5公準が「三角形の内角の和は2直角である」という定理と同値であることを示していた*1)．さらに，第5公準を仮定しなければ「三角形の内角の和は2直角以下である」ことも示していた．ということは，第5公準を否定した幾何学である非ユークリッド幾何学では，三角形の内角の和は2

*1) 第5公準から「三角形の内角の和は2直角である」が証明されることは，原論に書かれている．

直角より真に小さいということになる．ガウスは，非ユークリッド幾何学の場合に，さらに

$$(2\,直角) - (三角形の内角の和)$$

が三角形の面積に比例することに気付き，ユークリッド幾何学の場合も併せて

$$K = \frac{(三角形の内角の和) - (2\,直角)}{三角形の面積} \quad (1)$$

が，空間の曲がり方を表す量であると考えたのである．ユークリッド幾何，非ユークリッド幾何に対して，K はそれぞれ 0，負の定数であることに注意しよう．$K \equiv 0$ であること，これがユークリッド空間が「平坦」であることの正確な主張なのである．

実際に (1) が「空間の曲がり方」を表す量であることを，ガウスは曲面の場合を研究することにより間接的に確かめようとした*2)．曲面は，無限小部分では平坦であり，したがって（近似的に）三平方の定理が成り立つ．この無限小における三平方の定理を表現する量（第 1 基本形式）を導入する．ガウスは，曲面の「外から見た」曲がり方を表す量を定義し（ガウス曲率），次にそれが第 1 基本形式のみを使って表現されることを示した（ガウスの「驚異の定理」)．さらに，曲面上で点 p を囲む小三角形 ABC を考えたとき，p におけるガウス曲率 $K(\mathrm{p})$ は

$$\frac{(\triangle\mathrm{ABC}\,の内角の和) - (2\,直角)}{\triangle\mathrm{ABC}\,の表面積} \quad (2)$$

により（定数倍を除いて）近似されることも確かめた．ただし，曲面上の三角形の辺は最短線とする．「驚異の定理」あるいは (2) によれば，「曲がり方」が曲面の内在的量（「曲面の中にいるもの」が認識できる量）であることが分かる．

非ユークリッド幾何学の「矛盾なき存在」は，「第 5 公準を否定したらどうなるか」という疑問に答えようとする数学の内的動機から確認されたことである．それは空間の数学である幾何学の見方を大きく変えた．すなわち，幾何学はもはや現実の空間の記述ではなく，公準は空間についての「真理」を表す必要はないという考え方を醸成したのである．公準系の選択は（理論に矛盾を含まない限り）任意なのである．しかし，これは数学の内部運動へのインパクトであり，空間の物理的認識に対する観点を完全に変化させるものではない．ガウスは数学の内部運動を超えて，彼の曲面論と非ユークリッド幾何学の「先にあるもの」を夢見ていた．宇宙を記述する幾何学の構築である．このガウスの夢は，リーマンにより現実化されることになる．

3. 多様体

もし宇宙空間が平坦でなければ，空間が「曲がっている」ことになる．これはどういうことなのだろうか．もし「曲がった宇宙のモデル」を曲面の直接的類似と考えるなら，曲面が横たわる空間があり，曲面をこの空間から眺めるように，宇宙をその内に包む「外側」の空間（4 次元，あるいはさらに高次元の空間）があり，宇宙の曲がり方はこの外の空間から眺めることで認識されることになる．しかし，アリストテレスの宇宙モデルが球の外は「何もない」という不可解な結論を導くのと同様に*3)，宇宙の外側とは「何ものなのか」という形而上学的疑問に突き当たるのである．

ガウスは，宇宙が平坦でないことは（もしそうであるならば）外から眺めることなしに宇宙の内部で判定されなければならないし，それが可能であると考えた．すなわち，非ユークリッド幾何学が数学理論として矛盾なく存在し，曲面の曲率が内在的意味を持つことを根拠として，「宇宙の構造は宇宙自身によって語られなければならない，しかも語られるだろう」と確信したのである．

このガウスの夢は，1854 年に発表されたリーマン（1826–1866）の教授資格論文「幾何学の基礎

*2)　ガウス以前にも，ヨハン・ベルヌイ（1667–1748）およびオイラーによる曲面上の最短線（測地線）の研究や，モンジュ（1746–1818）による曲線と曲面の研究など（1795 年），微分幾何学のパイオニアによる仕事があった．

*3)　ニコラス・クザーヌスによる指摘．

をなす仮説」(ゲッチンゲン大学) において現実化された[*4)]．リーマンは，上で述べた意味での「内在的」な一般次元の空間 (多様体) の概念を定義し，その上で三平方の定理の「無限小」版が成立するような曲がった空間を考察した．そして，この一般化された空間において内在的な曲率を定義したのである．この曲率はガウス曲率の一般化であり，宇宙の曲がり方を宇宙自身が語る量なのである．現在，リーマンの考察した空間は，リーマン多様体と呼ばれ，その幾何学はリーマン幾何学と言われる．

実は，曲がった高次元空間は，ラグランジュやハミルトンによる古典力学の中で「数学的技術」として登場していた．例えば，拘束力の下で運動する複数の質点を扱うときに，曲面の高次元における類似が必要となるからである．しかし，それは宇宙空間そのものを考察しようとしたリーマンやガウスの目論見とは異なるものである．

リーマンの多様体概念は，今日から見れば不完全なところがある．その後 (ある意味で) 究極的な内在的抽象空間の理論である位相空間論[*5)]を用いて，ワイルやホイットニーらにより多様体の定義は厳密化された[*6)]．さらにリーマン幾何学はリッチとレヴィ・チヴィタにより整理・発展され，アインシュタインが構築した一般相対論の数学的基礎としての役割を果たすことになったのである．

4. 時間と空間——ガリレイ時空からミンコフスキー時空および一般相対論へ——

これまで，ガウス，リーマンの時代までの空間認識に関する歴史を述べてきた．この空間は，「一切のものを収納している入れ物」である．しかし，「もの」は静止しているのではない．太陽の周りを地球は回り，地球は自分自身で回転し，地球上の物体は様々な理由で動き回っている．もし，これらの運動も込めた現象を扱うには，「入れ物」としての空間概念だけでは不十分である．時間と空間 (時空) に関するモデルが必要となる．

古典的な時空像，すなわち，ニュートンの運動法則 (特に慣性の法則) と整合的な時空モデルは**ガリレイ時空**と呼ばれる．数学的には，それは 4 次元アフィン空間であり，その時空構造に適合する 2 つの座標系 (慣性系) (x_1, x_2, x_3, t), (y_1, y_2, y_3, s) が次のような座標変換 (ガリレイ変換) で移り合うようなものである[*7)]．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -A\boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ t_0 \end{pmatrix}.$$

ここで A は直交変換である．ガリレイ時空では「絶対静止」の概念は無意味であるが，「同時刻」には意味がある．時空における普遍的な力学法則 (例えば万有引力の法則) は，人間が恣意的に選ぶ慣性系とは独立であるから，慣性系で表現した法則は自ずから「共変性」を持つ．なお，万有引力の法則を慣性系で記述すれば，質量密度 ρ を持つ物質が空間を満たしているとき，それが引き起こす重力ポテンシャルを u とすれば，ポアソンの方程式

$$\Delta u = 4\pi G\rho \tag{3}$$

が成り立つ (G は重力定数)．この方程式の共変性は，直交変換によるラプラス作用素 Δ の同変性に現れていることに注意しよう．

19 世紀後半まで，ガリレイ時空を時空モデルとするニュートン力学は，すべての物理現象を説明する完全な理論と考えられていた．しかし，それを「破ることになる」現象が既にニュートンの時代から知られていた．それは，電気・磁気の現象である．実際にニュートン力学を「破る」ことが

*4) ガウスはこの講演に出席し，その見事な内容に興奮したあまり，講演の帰り道に溝に落ちたと伝えられている．それはガウスの死の 1 年前であった．

*5) 「遠近」の概念を定性的に定式化した空間であり，例えば空間が「閉じている」ことを内在的に定義できる．

*6) n 次元 (位相) 多様体は，各点が n 次元数空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合と同相な近傍を持ち，ハウスドルフの分離公理を満たす位相空間である．

*7) 正確には，アフィン直線 A^1 への全射アフィン写像 π を持つ 4 次元アフィン空間 A^4 である．ただし，逆像 $\pi^{-1}(t)$ $(t \in A^1)$ の共通のモデルである 3 次元線形空間は計量線形空間の構造を持つとする (すなわち，$\pi^{-1}(t)$ はユークリッド空間である)．

明らかになったのは，マクスウェルが電磁場の基本法則を表す方程式を発見したときである．すなわち，マクスウェル方程式から導かれる次のような事実がニュートン力学と矛盾する．

(1) どのような慣性系に対しても，真空中の光の速さ c（電磁場の進行速度）は不変であること．

(2) 慣性系のガリレイ変換では，基礎方程式は不変でないこと．

アインシュタインは，マクスウェル方程式を不変にする変換は 2 つ慣性系 (x_1, x_2, x_3, t), (y_1, y_2, y_3, s) に対して，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -A\boldsymbol{v} \\ \mp c^{-2}\left(1-\dfrac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}\right)^{-1/2} {}^t\boldsymbol{v} & \pm\left(1-\dfrac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ t_0 \end{pmatrix}$$

により与えられることを見出し，時空の構造はガリレイ時空とは異なることを主張した（特殊相対論）．ここで，$\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3$ は $|\boldsymbol{v}| < c$ を満たすベクトル（慣性系の間の相対速度）であり，A は

$${}^tAA = I_3 + \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2 - |\boldsymbol{v}|^2} P_{\boldsymbol{v}},$$

$$\det A = \left(1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

を満たす 3 次の正方行列である．さらに，I_3 は 3 次の単位行列，$P_{\boldsymbol{v}}$ は $\mathbf{R}^3$ の直線 $\mathbf{R}\boldsymbol{v}$ への直交射影である．

この変換（ローレンツ変換）を反映する新しい時空のモデルは，ミンコフスキーにより定式化された（1907 年）．それは，4 次元アフィン空間 A で，その線形空間モデルに符号 $(3,1)$ の計量 g が与えられているものである．(A, g) はミンコフスキー時空と呼ばれる．ミンコフスキー時空における慣性系は，$\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, t)$ とするとき，$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - c^2t^2$ が成り立つよ

うな A の座標系 (x_1, x_2, x_3, t) である．

ミンコフスキー時空でマクスウェルの方程式を表現すれば，慣性系の取り方に依らない形式

$$d\Omega = 0, \quad d^*\Omega = \eta$$

が得られる．ここで，Ω は電磁場に対応する 2 次の微分形式であり，η は電荷密度と電流密度に対応する 1 次の微分形式である．また，d, d^* は外微分作用素とその共役作用素を表す．ニュートン力学も時空モデルの取替えによる変更を受ける[*8]．

特殊相対論は重力理論を含まない．何故なら，ポアソンの方程式がミンコフスキー時空では共変な形をしていないからである．アインシュタインは，極めて大胆な発想でこの困難を乗り越えた．その出発点となるのが，慣性質量と重力質量の等価性（重力場の下での質点の運動が，質点の質量には依らないこと），その結果として，「非慣性系」の中に生じる加速度が重力加速度と区別できない事実である．重力場の理論を構築するには，非慣性系（曲線座標系）を考察することが自然になる．さらに，曲線座標系を取り入れる理論であれば，時空自身が平坦である必要はない．すなわち，時空は多様体であってもよい．

もう少し詳しく述べよう．重力ポテンシャルの下で，質点の運動は

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = -\frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{4}$$

により記述される（ただし，質点自身が作る重力場は，無視できるほど小さいとする）．アインシュタインは，（宇宙）時空における物質はミンコフスキー時空を「曲げて」ローレンツ多様体に変えること，および質点の運動方程式はローレンツ多様体における測地線の方程式により与えられると仮定した．そして，測地線の方程式

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = -\sum_{i,j=1}^{4} \Gamma_i{}^k{}_j \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}, \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

を (4) と見比べ，クリストッフェルの記号 $\Gamma_i{}^k{}_j$ が，第 1 基本形式の 1 階微分で与えられることに注意して，ローレンツ計量（第 1 基本形式）こそ，重力ポテンシャルそのものであると見抜いたのである（1916 年）．そして，ポアソンの方程式の類似として，リッチ曲率 R_{ij} に関する方程式

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \tag{6}$$

を導いた．ここで，g_{ij} は第 1 基本形式の係数，T_{ij} は物質のエネルギー・運動量テンソル，R はスカラー曲率を表す．

こうして，ガウスの夢は少し形を変えて現実化されたのである．

*8) 慣性系で表現した運動方程式では，質量は質点の速度に応じて変化することになる．

5. 終わりに

宇宙の 1 点で，その周りにある極めて限られた情報から，宇宙全体の構造を語るなどということは，神をも恐れぬ仕業としか言いようがない．しかし，知性が及ぶ範囲は，もしそれが宗教的教義や哲学的ドグマに阻まれない限りは，無限の彼方に広がるのである．

当然のことながら，現代はブルーノの時代と違って宗教の教義と異なる宇宙観により迫害を受けることはないし，哲学的見解に合わないからといって，宇宙観を公にするのに遠慮する必要はない．すなわち，我々は自由なのである．しかし，宇宙観は自由であるものの決して任意ではない．

参考文献

1) 砂田利一，『数の理・物の理』，全 5 巻，岩波書店，2005 年．
2) 砂田利一，『幾何入門』，岩波書店，2004 年．
3) 砂田利一，『曲面の幾何』，岩波書店，2004 年．
4) 中村幸四郎，寺坂英孝，伊東俊太郎，池田美恵訳・解説，『ユークリッド原論』，共立出版，1996 年．

（すなだ・としかず，明治大学理工学部）

量子力学から見た「空間」



新井 朝雄

1. はじめに——状態と物理量

本稿の目的は，量子力学に関わる“空間”とその構造について論述することである．これをより統一的な観点から行うために，まず，一般の物理理論の理論的構造に関する基本的な事柄を述べておきたい．

一般に，物理理論を純理論構造的に見た場合，それは，物理系の**状態**と**物理量**と呼ばれる２つの概念を基礎に据えて構成されていることがわかる．この構造自体は，どの物理理論にも共通するものである．だが，当然のことながら，異なる範疇に属する物理理論においては，そこに据えられる状態と物理量の概念は異なる[*1)]．

物理系の時間的変化は，状態の時間的変化——時間発展とも言う——として捉えられる．物理的な観点から第一義的に興味があるのは，状態の時間発展を知ることである．ある時刻での状態を１つ指定したとき，後の任意の時刻での状態が一意的に決まるような系は**因果的**と呼ばれる．これは状態の時間発展に関する最も基本的な型である[*2)]．一方，因果的でない物理系も存在する[*3)]．しかし，因果的であるにせよそうでないにせよ，物理理論の範疇のそれぞれにおいて，物理系の状態の時間発展を原理的な仕方で統制する方程式の存在が想定される[*4)]．このような原理的な方程式は，当該の理論的範疇の**基礎方程式**と呼ばれる[*5)]．基礎方程式を解くことにより，状態の時間発展に関する情報が得られる[*6)]．しかし，基礎方程式を解かなくても，それを種々の角度から考察することにより，対象とする系の一般的な性質が導かれ得る[*7)]．

さて，各物理系は，一般には，様々な状態をとり得る．したがって，各物理系に付随して，その物理系がとり得る状態をすべて集めてできる集合を考えることができる．これを当該の物理系の**状態空間**と呼ぶ．同様に，物理系の物理量にもいろいろのものがあり得るので，物理量をすべて集めてできる集合を考えることができ，これを当該の物理系の**物理量の空間**と呼ぶ．こうして，各物理系に対して，２つの空間が同伴して

---

*1)　例えば，古典力学系の状態は，質点の位置と速度（または運動量）の値の組で表される．古典力学系では，位置と速度は物理量の基本要素であり，他の物理量は，位置と速度の関数として表される．他方，例えば，古典電磁気学における状態は，電磁場によって表され，物理量は電磁場の関数として表される．量子力学における状態と物理量については以下で詳述する．

*2)　因果的な系の基本的な例は，通常の古典力学で扱われるような系（例えば，惑星の運動）である．ただし，厳密に言えば，系が因果的に持続する時間間隔には制限がつき得る．これは，数学的には，系の状態の時間発展を記述する微分方程式の初期値問題の解の一意性の問題と呼応している．

*3)　例えば，非常に細かく砕いた花粉の，水の中での運動においては，ある時刻での状態を指定しても，後の任意の時刻での状態は一意的に決まらず，確率的に分布する．

*4)　もちろん，アプリオリには，そのような方程式の存在は自明ではない．新しい現象領域に対しては，その現象領域を根底において支配する方程式を見出すことが物理学者の仕事の第一の目標になる．

*5)　古典力学の基礎方程式はニュートンの運動方程式であり（より一般的には，ラグランジュ方程式やハミルトン方程式 [文献 6) の 5 章]），古典電磁気学の基礎方程式はマクスウェルの方程式である [文献 6) の 7 章]．

*6)　ただし，基礎方程式は，つねに陽に解ける（具体的な関数等を用いて，解を表すことができる）とは限らない．そのような場合は，解の存在を証明することが第一に重要な問題になる．

*7)　例えば，古典力学における，保存力場での運動におけるエネルギー保存則や中心力場での運動における角運動量保存則．文献 6) の 4.4 節や 4.7 節を参照．

いることがわかる*8)．

状態空間と物理量の空間は，対象となる物理現象領域の種々の特性と呼応する形で，何らかの構造を持つことが推測される．その場合には，それらの構造を探究することにより，当該の物理現象領域と関わる，より高次の理念的領界が見出されることが期待される．こうして，集合論的・全体俯瞰的な方法により，物理現象とその理法に関して，より深い認識と観照が可能になる．それは，個別的な物理現象の解析にとどまっていたのでは達成されないものである．

例 1 3 次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の領域 D（連結開集合）の中を運動する，1 個の質点の状態の空間は，D と $\mathbb{R}^3$ の直積空間 $D \times \mathbb{R}^3 := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) | \boldsymbol{x} \in D, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3\}$ であり [$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ は，物理的には，位置 $\boldsymbol{x}$ で速度 $\boldsymbol{v}$ をもつ状態を表す]，物理量の空間は，$D \times \mathbb{R}^3$ 上の実数値関数の全体である*9)．各 $\boldsymbol{x} \in D$ に対して，$V_{\boldsymbol{x}} := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) | \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3\}$ とおくと，$D \times \mathbb{R}^3 = \cup_{\boldsymbol{x} \in D} V_{\boldsymbol{x}}$ と書ける．これは，一見，何でもないことのように見えるかもしれないが，実は，この表示の中に，ある普遍的な理念の具象的実現の一つを見ることができるのである．それは接バンドルと呼ばれる理念である．さらに探求の歩みを理念界の "上方に" 進めるならば，接バンドルの理念を包含する，ベクトルバンドル，ファイバーバンドルといった，より高次の理念が見出される*10)．

2. 量子系の状態空間

量子系の状態の空間がいかなるものであるかを発見法的に見出す道はいくつかあり得る．紙数の都合上，ここでは，そのような道の一つの概略だけを述べる．

原子，電子，核子（陽子，中性子），中間子（もっと一般には素粒子）などいわゆる微視的対象は総称的に**量子的粒子**と呼ばれる．「量子的」という修飾語がつくのは，それが古典力学的な意味での粒子的対象ではないことによる．すなわち，量子的粒子というのは，観測の仕方に応じて，いわば "変幻自在に" 姿を変えて現象する存在なのである．この特性を量子的粒子の**現象的多重性**と呼ぶ．この意味で，量子的粒子に対しては，観測の仕方に応じて，複数の描像が得られる．しかも，これらの描像は互いに排他的であり得る．同一の量子的粒子に対して，互いに排他的な描像が成立する，という性質をニールス・ボーアは**相補性**と呼び，それを量子的粒子の原理的な性質の一つであると考えた*11)．

量子的粒子の現象形態のうちで典型的なのは，波動的な現象形態と粒子的現象形態であり，この性質は，通常，**波動–粒子の双対性**または**二重性**として言及される．もちろん，波動的現象形態と粒子的現象形態は互いに排他的であり，それらが同時に現れるということはない（相補性の基本的な例の一つ）．

量子系の状態――以下，しばしば，単に状態と呼ぶ――の概念を見出すための一つの鍵は，量子的粒子の波動的現象形態に着目することである．今，量子系の状態は，数学的には，何らかの代数的対象で表されるとし，それらを $\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \cdots$ という記号で表そう．古典的な波動については，波動を表す関数の和として重ね合せという概念が定義される．量子系の状態を波動的描像で見た場合，観測事実から，量子系の状態空間には和の演算とスカラー倍の演算が定義され，次の 2 つの性質が成り立つことが推測される：(i)（**状態の相等**）状態 Ψ と $\alpha\Psi$ [$\alpha \in \mathbb{C}$（複素数の全体），$\alpha \neq 0$] は同じ状態を表す（これは古典的な波動と本質的に異なる点であることに注意）；(ii)（**重ね合せの原理**）任意の有限個の状態 $\Psi_1, \Psi_2, \cdots$, に対して，それらの和 $\Psi_1 + \Psi_2 + \cdots$ も状態を表し，それは和の取り方の順序によらない．これらの考察から，量子系の状態の空間はベクトル空間（線形空間）であるという作業仮説へと導かれる*12)．だが，ベクトル空間というだけでは，計量的な構造については何も言及していないので，観測結果――それは数値で表される――との対応付けを行うことができない．そこで，この点を明らかにするために，別の観測事実に注意を向ける．すなわち，量子系の状態どうし

*8) 言うまでもなく，これらの空間は，感覚的・物質的なものではなく，非感覚的・非物質的である．哲学的に言うならば，それらは理念的・形而上的なものであり，感覚的・物質的（形而下的）次元の "上位" ないし "背後" に存在する，より高次のリアリティに関わる．

*9) 「$A := B$」は B によって A を定義するということを表す記法．

*10) ここで言及した術語については，文献 7) の 12.15 節，13.5 節を参照．しかし，今ただちに参照する必要はない．

*11) 量子的粒子がどのように現象するかはそれを測定する装置と不可分である．現象とはそもそも何か，という問題をつきつめて行くと，現象とは「実験全体の説明を含む，特定された状況の下で得られる観測」（ニールス・ボーア：文献 12) の p.203）という特徴づけへと到る（これは，量子現象に限らず，すべての現象に適用される）．

*12) （抽象）ベクトル空間の定義については，例えば，文献 6) の 1 章を参照．

の間には，観測によって，非因果的とみなされる遷移が起こり，しかもその生起の仕方はある確率法則に従う，という観測事実である．これは，量子系の状態空間が，任意の2つの状態 Ψ, Φ に対して，Ψ が Φ に遷移する相対確率 $P(\Psi, \Phi)$ を記述できる構造を備えていなければならないことを示唆する．この場合，対称性により，$P(\Psi, \Phi) = P(\Phi, \Psi) \cdots (*)$ が成立すべきである．ところで，ベクトル空間は内積——$\langle \cdot, \cdot \rangle$ と記す——と呼ばれる計量的構造をもち得る[*13]．そこで，各量子系に応じて，その状態のベクトル空間に然るべき内積を導入し，$P(\Psi, \Phi) = |\langle \Psi, \Phi \rangle|^2 \cdots (**)$ とおくと，これは $(*)$ を満たし，量子系の状態に関する基本的な観測事実（例えば，光の偏向状態や原子の磁気モーメントに関する観測事実）をうまく説明することができる．ただし，この場合，ベクトル空間の係数体は実数体ではだめで，複素数体ならばうまくゆくことがわかる．この点は，本質的である．こうして，量子系の状態空間の候補の一つとして，複素内積空間が浮かび上がってくる．この内積空間を $\mathcal{H}$ とする．次の点にも注意しよう：(i) $\Psi = 0$（$\mathcal{H}$ の零ベクトル）ならば，任意の $\Phi \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle \Psi, \Phi \rangle = 0$ であるから，$(**)$ によって，$P(\Psi, \Phi) = 0$．これは，どの状態も零ベクトルには決して遷移しないことを意味する．したがって，零ベクトルは，状態を表すベクトルであるとはみなされない．(ii) 複素内積空間は，つねに完備化が可能であり，複素ヒルベルト空間の稠密な部分空間とみなせる[*14]．以上の発見法的考察は，量子系の状態は複素ヒルベルト空間の零でないベクトルで与えられる，ということを示唆する[*15]．これを公理の形にまとめれば次のようになる：

公理 (QM.1)（状態に関する公理）　量子系の状態は，複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の零でないベクトルによって表される．ただし，任意の状態 Ψ と任意の零でない複素数 α に対して，$\alpha\Psi$ と Ψ は同じ状態を表す（状態の相等原理）．$\mathcal{H}$ を状態のヒルベルト空間と呼ぶ．

この公理へと到る，上述の推論は，数学的単純さと数学的美の原理に照らして見た場合，ほとんど必然的なものであることが見てとれよう．この意味で公理 (QM.1) は自然なものであり，量子現象の本質を——少なくともある一定のレヴェルにおいて——捉えたものとみなせる．ただし，状態のヒルベルト空間の係数体を，複素数体を含む代数（例えば，4元数体）で置き換えることは，可能性の一つとして残されている[*16]．ここで，公理 (QM.1) について若干の注意を述べておく．

(1)　量子系を1つ定めてもその状態のヒルベルト空間は一意的には決まらない（以下の例2と例3を参照）．これは，公理の欠点ではなく，それどころか，まさに，それによって，量子的粒子の現象的多重性や相補性を統一的に捉えることができるのである．この点については，後の5節で，さらに詳しく述べる．

(2)　状態の相等原理は，量子的粒子の不可弁別性の原理（同種の量子的粒子どうしは区別できないということ）と結合して，多体系において重要な働きをする[*17]．だが，それは，量子力学的状態の解釈においても本質的である．なぜなら，この原理によれば，量子力学的状態が物理的空間の基本的モデルである，3次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ またはその直積空間上の関数 ψ によって表されたとしても，それは古典的な意味での波動としては解釈され得ないことが結論されるからである（もし，$\psi \neq 0$ が古典的な波動であれば，$\alpha\psi$ $(\alpha \neq 1)$ と ψ は，振幅が異なるので，異なった波動状態を表す）．

例2　古典力学的な意味での配位空間 $\mathbb{R}^3$ の中に存在する，粒子的描像から見て1個の量子的粒子の位置を測定するという描像においては，$\mathbb{R}^3$ 上の，ルベーグ積分に関して2乗可積分な可測関数の全体 $L^2(\mathbb{R}^3)$ が状態のヒルベルト空間として適切であることがわかる．

例3　量子的粒子の粒子的描像では，位置とならんで運動量という物理量がある．そこで，運動量の空間 $\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{p}} := \{\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 | p_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3\}$ 上の，ルベーグ積分に関して2乗可積分な可測関数の全体 $L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{p}})$ を状態のヒルベルト空間として選ぶことも可能である．これは，粒子的描像において，量子的粒子の運動量を観測するという設定に同伴するヒルベルト空間である．

*13)　文献 6) の2章や文献 9) の1章を参照．

*14)　文献 9) の 1.4.4 項を参照．

*15)　上の議論の，より詳しい叙述が文献 10) の 3.1 節にある．また，ここに導かれた結論は，光の偏向や原子の磁気モーメントに関する実験（シュテルン–ゲルラッハの実験）に基づいた推論によっても到達可能である．前者については，文献 11) の第2部や文献 13) の1章を，後者については，文献 14) の1章が参考になろう．

*16)　4元数体上のヒルベルト空間による量子力学の定式化は文献 1) に見られる．

*17)　文献 5) の第1章を参照．

以下，複素ヒルベルト空間を単にヒルベルト空間と呼ぶ．

3. 量子系の物理量

次に量子系における物理量の空間がいかなるものであるかを発見法的に考察してみよう．これも観測事実に基づいてなされなければならない．例えば，量子的粒子の“位置”を（実験精度の範囲で）同一とみなされる状態において，複数回にわたって，測定を行う場合を考える．この場合，古典的な粒子とは違って，その測定値は，一般には，各回ごとに異なり，測定値の全体は，状態に応じて，ある確率分布に従う．これは，同一の状態でも量子的粒子が一般には確定した，位置の値をもたないことを示す．したがって，もし，位置に相当する物理量があるとすれば，それは，位置の測定値とは別物と考えねばならない．同様のことが他の物理量に対してもあてはまるであろう．前節で見たように，量子系の状態空間はヒルベルト空間である．量子系の状態がヒルベルト空間の零でないベクトルによって表されるのであれば，この空間に働く線形作用素も物理的に何らかの役割を演じるであろうと想定するのは自然である．ヒルベルト空間上の線形作用素論で学ぶように，線形作用素 A と数を結びつける自然な概念として，ベクトル Ψ に関する期待値 $\langle\Psi, A\Psi\rangle$（$\Psi \in D(A)$; $D(A)$ は A の定義域を表す）と A のスペクトル $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ がある*18)．そこで，物理量は状態のヒルベルト空間上の線形作用素で表されるという作業仮説をたてる．物理的な状態によって生成される部分空間が状態のヒルベルト空間で稠密であるとするのは自然な要請である．これに対応して，物理量 A は稠密に定義されているとするのも自然である．さらに次の (P.1), (P.2) を仮定してみよう：(P.1) 状態 Ψ での，確率的に分布する，A の測定値の期待値は $\langle\Psi, A\Psi\rangle/\|\Psi\|^2$ に等しい（$\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi,\Psi\rangle}$ は Ψ のノルム）；(P.2) $\sigma(A)$ は閉集合であり，A の測定値の全体の閉包は $\sigma(A)$ に等しい．ところで，物理量の測定値は（したがって，期待値も）実数で与えられる*19)．これと (P.1) は，A が対称作用素であることを導く*20)．対称作用素は可閉作用素であるので，その閉包が存在する．これを改めて A とすれば，A は閉対称作用素である*21)．一般に，閉対称作用素のスペクトルが $\mathbb{R}$ の閉部分集合となるものは自己共役作用素であることが証明される*22)．したがって，A は自己共役でなければならない．こうして，物理量に関して，次の公理に到達する：

公理 (QM.2)（物理量に関する公理） 量子系の物理量は，その状態のヒルベルト空間上の自己共役作用素によって表される．

この公理から，量子系の物理量の空間は，状態のヒルベルト空間上の自己共役作用素の全体であることが結論される．この空間の研究は，より高次の観点からは，**非有界作用素代数**や**作用素環**の理論と結びつく．

物理量のうち，量子系の全エネルギーを表す自己共役作用素は，古典力学の術語を流用して，**ハミルトニアン**と呼ばれる．これは，古典力学の場合と同様，量子系のモデルを特徴づける物理量の一つである．

例 4 ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ における線形作用素 $\hat{x}_j$ $(j = 1,2,3)$ を次のように定義する：$D(\hat{x}_j) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) | \int_{\mathbb{R}^3} |x_j\psi(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} < \infty\}$，$(\hat{x}_j\psi)(\boldsymbol{x}) := x_j\psi(\boldsymbol{x})$，$\psi \in D(\hat{x}_j)$, a.e.$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$（「a.e.」は「ルベーグ測度に関してほとんど至る所」を意味する）．作用素 $\hat{x}_j$ を j 番目の**位置作用素**と言う．これは自己共役である．

例 5 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の線形作用素 $\hat{p}_j$ を $\hat{p}_j := -i\hbar D_j$ によって定義する．ただし，i は虚数単位 $(i^2 = -1)$，$\hbar := h/(2\pi)$（h はプランクの定数），D_j は変数 x_j に関する一般化された偏微分作用素である．$\hat{p}_j$ を j 番目の**運動量作用素**と呼ぶ．これも自己共役である．

例 6 $\mathbb{R}^3$ 上のポテンシャル $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$（ボレル可測）の作用の下にある，質量が $m > 0$ でスピン 0 の非相対論的量子的粒子のハミルトニアンはシュレーディンガー型作用素

$$H_{\mathrm{S}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \hat{V}$$

*18) 文献 9) の 2 章や文献 6) の 9.7 節を参照．

*19) ただし，より一般的な観点から言えば，虚数の場合でも，その実部と虚部がそれぞれ，何らかの物理量の測定値を表すという意味で，それが物理量の測定値を表す場合も想定され得る．

*20) 文献 6) の命題 9.55 または文献 9) の命題 2.30．

*21) 文献 6) の 9.8 節または文献 9) の 2.3 節を参照．

*22) 文献 6) の定理 9.61 または文献 9) の定理 2.42．

で与えられる．ただし，$\hat{\boldsymbol{p}}^2 := \sum_{j=1}^3 \hat{p}_j^2$ であり，$\hat{V}$ は関数 V による掛け算作用素である．V のいくつかのクラスに対して，$H_{\rm S}$ の（本質的）自己共役性が証明される*23)．

自己共役作用素のスペクトル定理を用いると，公理 (QM.2) から，量子現象の確率的特性に対する一般的かつ原理的な定式化を確立することができる．この構造は実に見事というほかはないものであるが，残念ながら，ここでは，それを解説する余裕がない*24)．

4. 量子系の時間発展と状態のヒルベルト空間の構造

量子系の時間発展についても発見法的な考察が可能であり，ある自然な仕方で次の公理へと到ることができる*25)．

公理 (QM.3)（状態の時間発展） $\mathcal{H}$ を量子系の状態のヒルベルト空間とし，H を量子系のハミルトニアンとする．このとき，量子系が，時刻 $t_0 \in \mathbb{R}$ で状態 Ψ_0 にあるならば，任意の時刻 $t \in \mathbb{R}$ での状態 $\Psi(t)$ は——その間に系に対して観測を行わない限り——$\Psi(t) = e^{-i(t-t_0)H/\hbar}\Psi_0$ によって与えられる*26)．

この公理によれば，時刻 0 での状態（初期状態）が Ψ であるときの状態の時間発展は，$\mathbb{R}$ から $\mathcal{H}$ への連続写像 $\Psi_H : \mathbb{R} \to \mathcal{H}; \Psi_H(t) := e^{-itH/\hbar}\Psi$ を定義する．一般に，$\mathbb{R}$ または $\mathbb{R}$ の区間から $\mathcal{H}$ への連続写像を $\mathcal{H}$ 内の曲線と言う．そこで，Ψ_H を初期状態が Ψ の**状態曲線**または**量子力学的流線**と呼ぶ．状態曲線の全体を $\mathcal{S}_H$ としよう：$\mathcal{S}_H := \{\Psi_H | \Psi \in \mathcal{H}\}$．これは写像の和とスカラー倍に関して複素ベクトル空間である．この集合の部分集合 $\mathcal{S}_H^{(1)} := \{\Psi_H | \Psi \in D(H)\}$ は**抽象的シュレーディンガー方程式**

$$i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t), \quad \Psi(0) \in D(H)$$

（微分は強微分の意味でとる）の解の全体であり，$\mathcal{S}_H$ の部分空間である．次の定理は，ハミルトニアンが状態のヒルベルト空間に 1 つの秩序を現出させることを語るものであり，たいへん興味深い*27)：

定理 1 **(i)** 異なる初期状態に対する状態曲線は交わることはない．すなわち，$\Psi \neq \Phi$ ($\Psi, \Phi \in \mathcal{H}$) ならば，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\Psi_H(t) \neq \Phi_H(t)$．
(ii) 状態のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は状態曲線で埋め尽くされる．すなわち，$\mathcal{H} = \cup_{\Psi\in\mathcal{H}}\{\Psi_H(t)|t \in \mathbb{R}\}$．
(iii) $\mathcal{S}_H^{(1)}$ の状態曲線は $\mathcal{S}_H$ において稠密に分布している．すなわち，任意の $F \in \mathcal{S}_H$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\|F_n(t) - F(t)\| = 0,\ t \in \mathbb{R}$，を満たす $F_n \in \mathcal{S}_H^{(1)}, n = 1, 2, \cdots$，が存在する．

5. 正準交換関係の表現空間としての状態空間

最後に，量子系の状態のヒルベルト空間がいかなる原理に基づいて特徴づけられるかを考察しておこう．この側面は，実は，物理量の空間の構造と密接に結びついている．この問題を解くにあたっても，ある自然な発見法的議論が可能であるが，ここでは，それは割愛し，結論だけを述べる．

まず，概念をいくつか用意する．ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ で働く線形作用素 A, B に対して，$[A, B] := AB - BA$ を A と B の**交換子**と呼ぶ．部分空間 $D \subset D(AB) \cap D(BA)$ と $\mathcal{K}$ 上の線形作用素 C で $D \subset D(C)$ を満たすものがあって，すべての $\Psi \in D$ に対して，$[A, B]\Psi = C\Psi$ が成り立つとき，A, B は D 上で交換関係 $[A, B] = C$ を満たすと言う．$C\Psi = 0, \Psi \in D$ のとき，A, B は D 上で可換であると言う．

N を自然数とし，$\Pi := \{Q_j, P_j | j = 1, \cdots, N\}$ を $\mathcal{K}$ 上の対称作用素の組とする．$\mathcal{K}$ の稠密な部分空間 D があって，$D \subset \cap_{j,k=1}^N [D(Q_jP_k) \cap D(P_kQ_j) \cap D(P_jP_k) \cap D(Q_jQ_k)]$ かつ D 上で**正準交換関係** (canonical commutation relations; CCR と略す)

$$[Q_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk},\ [Q_j, Q_k] = 0,\ [P_j, P_k] = 0. \qquad \text{(CCR)}$$

が成り立つとき（δ_{jk} はクロネッカーのデルタ），Π を $\mathcal{K}$ 上における，**自由度 N の CCR の表現**と言う．この場合，$\mathcal{K}$ を純代数的構造としてのCCRの**表現空間**と

*23) 文献 8) の第 2 章を参照．
*24) 詳細については，文献 2) の 6.2 節，文献 10) の 3.1 節，文献 6) の 10.2 節などを参照．
*25) 紙数の都合上，その発見法的議論は省略する．詳しくは，文献 2) の 6.5 節や文献 10) の 3.5 節を参照．
*26) $\{e^{-isH}\}_{s\in\mathbb{R}}$ は自己共役作用素 H に関する作用素解析を介して定義される，強連続 1 パラメーターユニタリ群である．文献 2) の 4.3 節，文献 6) の 9.10 節あるいは文献 10) の 3.5 節を参照．
*27) 文献 8) の命題 4.39.

呼ぶ．もし，各 Q_j, P_j $(j = 1, \cdots, N)$ が自己共役作用素であるならば，Π は**自由度 N の CCR の自己共役表現**であると言う．

注意 1　純代数的構造としての CCR は，理念的な実体としては，**ハイゼンベルク型リー代数**として把握される．したがって，CCR の表現というのは，実は，この代数のヒルベルト空間表現のことである*28)．

注意 2　(CCR) の第一式において，$j = k$ とおくと，$[Q_j, P_j] = i\hbar \neq 0$ であるので，Q_j と P_j は D 上で可換ではない．この非可換性は，いわゆるハイゼンベルクの不確定性関係を導く*29)．他方，ハイゼンベルクの不確定性関係は相補性の一つの現れである．ゆえに，CCR は，量子力学的物理量の基礎的構造の一つとして，自然なものであることが推測される．

以下の例は，CCR の自己共役表現が無数に存在することを示す．

例 7　粒子的描像における位置作用素 $\hat{x}_j$ と運動量作用素 $\hat{p}_j$ の組 $\{\hat{x}_j, \hat{p}_j | j = 1, 2, 3\}$（例 4，例 5）は自由度 3 の CCR の自己共役表現である．この型の表現を**シュレーディンガー表現**と呼ぶ．

例 8　$L^2(\mathbb{R}^3)$ から $L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{p}})$ へのフーリエ変換 $\mathcal{F}$——$(\mathcal{F}\psi)(\boldsymbol{p}) := (2\pi\hbar)^{-3/2} \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\boldsymbol{px}/\hbar}\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$（$L^2$ 収束の意味でとる）——はユニタリである．$\hat{x}'_j := \mathcal{F}\hat{x}_j\mathcal{F}^{-1}, \hat{p}'_j := \mathcal{F}\hat{p}_j\mathcal{F}^{-1}$ とおけば，$\hat{x}'_j, \hat{p}'_j$ は $L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{p}})$ 上の自己共役作用素であり，CCR を満たす（この場合，$\hat{p}'_j$ は，運動量空間 $\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{p}}$ における j 番目の座標変数 p_j をかける掛け算作用素である）．したがって，$\{\hat{x}'_j, \hat{p}'_j | j = 1, 2, 3\}$ も自由度 3 の CCR の自己共役表現である．

例 9　（例 8 の構造の一般化）$\{q_j, p_j | j = 1, \cdots, N\}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ における CCR の自己共役表現とし，$U : \mathcal{K} \to \mathcal{X}$（$\mathcal{X}$ は任意のヒルベルト空間）を任意のユニタリ作用素とすれば，$q'_j := Uq_jU^{-1}$, $p'_j := Up_jU^{-1}$ によって定義される作用素の組 $\{q'_j, p'_j | j = 1, \cdots, N\}$ は $\mathcal{X}$ における，CCR の自己共役表現である．

*28)　詳しくは，文献 7) の 18.12 節を参照．

*29)　文献 2) の 6 章や文献 10) の 3 章を参照．後者では，逆に，実験事実としての不確定性関係から CCR へと到る発見法的議論が試みられている．

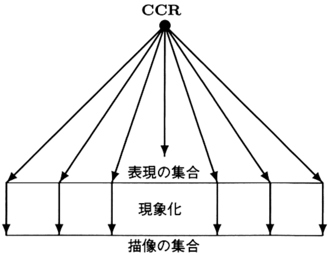


図 1　量子力学の基本的構図（象徴図）．

例 7 において，古典力学との対応を考慮すると，$\hat{x}_j$ と $\hat{p}_j$ は物理量を構成するための基本的な要素であるとみなされ，他の物理量は，これらの物理量の適切な意味での関数として与えられることが期待される．その一例は，すでに例 6 で見た．このことを前提とした場合，例 7 と例 8 のように，互いにユニタリ変換で移り合う理論は，物理理論としては全く同等であると考えられる．この場合，何が違うかと言えば，量子系に対する観測の設定，すなわち，物理的描像が異なるのである．ユニタリ変換は異なる描像を結ぶ役割を演じる．だが，これはまさに，量子現象の現象的多重性あるいは相補性と照応するものである．すなわち，表現空間の多様性と量子的粒子の現象的多重性が対応するのである（図 1）．

こうして，次の公理へと到達し，これにより，量子現象の数理の本質に対して，座標から自由な絶対的次元からの透徹した認識がもたらされる：

公理 (QM.4)（物理量の構成原理）　外的な自由度が N の量子系の状態のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は，自由度 N の CCR の自己共役表現 $\{Q_j, P_j | j = 1, \cdots, N\}$ の表現空間である．さらに，$Q_j, P_j, j = 1, \cdots, N$, は量子系の基本的な物理量であり，外的自由度に関する他の物理量は，これらの自己共役作用素から，適切な意味で，生成される．

注意 3　**(i)** 公理 (QM.4) は外的な自由度に関するものであるが，内的な自由度（例えば，スピン自由度）は，然るべき代数の，状態のヒルベルト空間における自己共役表現（自己共役作用素を用いて，当該の代数の生成元を実現すること）で与えられる*30)．

(ii) CCR の表現は，無限自由度（$N = \infty$）の場合も考えることができ，それはボソン的量子場（ボソンを

*30)　例えば，スピン自由度に関して言えば，2 次元特殊ユニタリ群のリー代数 su(2) の有限次元既約表現．

量子とする量子場）の理論を構成するための基本的要素となる．

ここまで来れば，有限自由度の量子力学の本質を一言で言い表すことができる：すなわち，それは有限自由度のCCRおよびいくつかの内的自由度を表す代数の自己共役表現である，と．ボソン的量子場の理論についても同様である．こうして，自由度の有限，無限に関わらず，量子力学の理論的構造に対して，統一的な観点が得られる*31)．ただし，この場合，理論の同等性の概念を確立しておく必要がある．簡単のため，外的自由度だけをもつ量子系を考え，その自由度を N とする．2つの量子論 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ があって，T_k $(k=1,2)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}_k$ 上における CCR の自己共役表現 $\{Q_j^{(k)}, P_j^{(k)} | j=1,\cdots,N\}$ で記述されているものとする．さらに，それらは既約であるとする*32)．ユニタリ変換：$\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ で $Q_j^{(2)} = UQ_j^{(1)}U^{-1}$，$P_j^{(2)} = UP_j^{(1)}U^{-1}$，$j=1,\cdots,N$, を満たすものが存在するとき――この場合，考察下の2つのCCRの表現は同値であると言う――，2つの理論 T_1 と T_2 は同等であると言う．こうして，外的な自由度を固定するごとに，量子論は，同等な量子論とそうでない量子論に分類される．これは，同一の自由度のCCRの既約な自己共役表現の分類に対応している．

> **例 10** 周知のように，量子力学は，歴史的には，外見が異なる2つの形式――ハイゼンベルクによる代数的な形式（1925）とシュレーディンガーによる解析的形式（1926）――をとって登場した．だが，上述の観点からは，その外見の違いは，要するにCCRの表現空間の違いにすぎず，両理論は同等であることが証明される*33)．

なお，有限自由度であっても，CCRの自己共役表現の中には互いに同値でないものもたくさんあることを注意しておく*34)．

*31) この観点は，フェルミオンを量子とする量子場の理論，すなわち，**フェルミオン的量子場の理論**や，さらには，ボソンとフェルミオンをある仕方で統一する**超対称的量子場の理論**を包含する理論へと自然に拡張される．文献 3,4) を参照．

*32) CCRの表現 $\{Q_j, P_j | j=1,\cdots,N\}$ が既約であるとは，大ざっぱに言えば，$Q_j, P_j, j=1,\cdots,N$, と可換な有界線形作用素が恒等作用素の定数倍である場合を言う（厳密な定義については，文献 8) の3章を参照）．

*33) 文献 10) の 3.8.6 項を参照．

*34) 物理の教科書や文献の中には，この点について，誤った記述をしているものが見られる．非同値な表現で物理的に重要な例に関する詳しい論述が文献 8) の 3.6 節にある．

参考文献

1) S.L. Adler: Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. Oxford University Press (1995).
2) 新井朝雄：『ヒルベルト空間と量子力学』共立出版 (1997).
3) 新井朝雄：『フォック空間と量子場』（上）日本評論社 (2000).
4) 新井朝雄：『フォック空間と量子場（下）』日本評論社 (2000).
5) 新井朝雄：『多体系と量子場』岩波書店 (2002).
6) 新井朝雄：『物理現象の数学的諸原理』共立出版 (2003).
7) 新井朝雄：『現代物理数学ハンドブック』朝倉書店 (2005).
8) 新井朝雄：『量子現象の数理』朝倉書店 (2006).
9) 新井朝雄・江沢　洋：『量子力学の数学的構造 I』朝倉書店 (1999).
10) 新井朝雄・江沢　洋：『量子力学の数学的構造 II』朝倉書店 (1999).
11) 荒木不二洋：虚数のイメージ．数理科学 No.482, 2003, 5–17.
12) ニールス・ボーア：『ニールス・ボーア論文集 1　因果性と相補性』（山本義隆編訳），岩波書店 (1999).
13) ディラック：『量子力學』（朝永振一郎ほか訳），岩波書店 (1968).
14) B.-G. エングラート編：『シュウィンガー量子力学』（清水清孝・日向裕由幸訳），シュプリンガー・フェアラーク東京 (2003).

（あらい・あさお，北海道大学大学院理学研究科）

熱力学の「空間」と統計力学の「空間」

ミクロとマクロを結ぶ鍵



田崎　晴明

1. ミクロとマクロを結ぶ営み

われわれ人間はマクロな（つまり，ほどほどに大きな）存在であり，マクロなスケールで周囲の世界と接している．そして，世界を直観的に認識するだけでなく，力学，熱力学，電磁気学に代表されるマクロな法則性を見出してきた．

他方，科学の発展によって，（われわれ自身を含む）すべての物質は，分子，原子などの目に見えないミクロな要素でできていることがわかってきた．そして，これらミクロな要素はマクロな世界とは質的に異なった法則に支配されていることが明らかにされた．このようなミクロな世界の構造と法則を探ることは物理学の重要なテーマであるが，単にそれだけでは，世界を理解する試みとしては片手落ちである．世界がミクロな要素からなることを知ってしまった以上，これまでは自明の前提として受け入れていた「**世界がわれわれの見ているような姿に見える**」という事実が，まったく**当たり前でなくなってしまうのだ**．言い換えれば，**ミクロな世界とマクロな世界のあいだの論理的な関連をつける**という新しい課題が生まれたことになる．マクロな知的存在がミクロな構造をもった世界に生きて，その世界を理解しようとするかぎり，避けて通ることのできない課題である．

統計力学は，この課題を真正面からあつかう物理学の一分野である．統計力学は，特定の手法で特定の対象をあつかう完成された方法ではなく，様々なスケールを柔軟に貫く縦糸のような役割を果たす（べき）独自の位置づけをもった物理学全体へのアプローチである．

この解説の主役は，統計力学の創始者ボルツマン[*1]の墓碑にも記されている，エントロピーの表式 $S = k \log W$ である．ミクロな世界とマクロな世界を結びつけるこの深い関係が，平衡統計力学の核心にある．ここでは，マクロな熱力学の「空間」とミクロな力学の「空間」の対応関係を探ることを通して，難解と言われることの多いこの関係式の「心」をできるだけ自然に描き出してみたい．

2. マクロ系の平衡状態：一つ目の「空間」

前半の 2, 3, 4 節では，思い切りマクロな側から世界を見ていこう．熱力学の一部（ただし，かなり概念的でかっこよくて，試験にはあまり出ない部分）を概観することになる[1]．

熱力学は，基本的にはすべてのマクロな系に適用できるおそろしく普遍的な体系だが，ここでは物理の本質を伝えるため，もっとも単純な系にかぎって話を進めよう．体積 V の容器の中に，一種類の物質が n モル入った系を考える．系は十分に大きく，マクロな系と見なせる．このような系が，外の世界から孤立した――つまり，物質・エ

*1）ギブスはボルツマンに少し遅れて平衡統計力学の現代的な定式化を行った．また，アインシュタインも，ギブスの仕事を知らずに，平衡統計力学を構築している．

ネルギーの出入りがいっさいない——状況におかれている．当然，物質量 n は変化しないし，エネルギー保存則が成り立つため，系のもつ全エネルギー U も変化しない．

熱力学の出発点となるのは，次の驚くべき経験事実である．**系が十分に長いあいだ孤立していると，その状態はマクロから見るといっさい時間変化のない平衡状態に落ち着く．平衡状態は，U, V, n という三つのパラメターだけで完全に指定され，初期状態の詳細に依存しない．**

平衡状態が三つの（一般には三つとはかぎらないが，それでも少数の）パラメターだけで指定できるのは，実用的に見てもきわめて便利なことである．これによって，たとえば，1 気圧の下での 120°C の水蒸気がつねに完璧に同じふるまいをすることが保証されるのだ．

平衡状態を (U, V, n) のように，三つの量の組で表す．(U, V, n) が動く範囲の全体を

$$\mathcal{E} = \{(U, V, n) \mid U, V, n \in \mathbb{R}_+\} \cong (\mathbb{R}_+)^3 \quad (1)$$

と書こう．$\mathbb{R}_+$ は正の実数の集合*2)である．$\mathcal{E}$ は，熱力学の平衡状態を表す**パラメター空間**であり，この解説に登場する一つ目の「空間」である．そして，**たった三つのパラメターで指定できる平衡状態とは，いったい何なのか**というのが，この解説であつかう一つ目の疑問である．

3. 平衡状態への断熱操作

平衡状態に対する外界からの操作を考えると，熱力学の世界は格段と豊かになる．ただし，

1. 操作は力学的な手段で実現できる；操作者が系にする力学的な仕事 W が測定できる

ことを要請する．考えを進めていく上では（物理の入試問題のようで申し訳ないが）シリンダー状の容器にはめたピストンを動かして系の体積を変化させる操作を想定するのがよいだろう（図 1）．

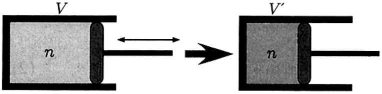


図 1　平衡状態への外界からの操作．力学的に実現可能なあらゆる操作が許されるが，容器についたピストンを動かして系の体積を変化させる操作を思い浮かべるのがよい．

この場合は，ピストンを押す力と移動距離を計っておけば，「仕事 = 力 × 距離」の公式から仕事を求めることができる．

操作によって，物質量 n は変化しないが，体積とエネルギーは一般に変化する．それぞれ，V から V' に，U から U' に変わるとしよう．ここで，上の 1 に加えて，

2. 操作者がした仕事 W は，系のエネルギーの増加 $U' - U$ につねに等しい

ことを仮定する．1, 2 を満たす操作を**断熱操作**という*3)．

エネルギーの収支を考えれば，2 で要請されている関係は当たり前に思えるかも知れない．しかし，それは，力学的な方法でわからないようなエネルギーの出入りがないと仮定した上での話だ．実際，一般のマクロな系は周りの環境と（マクロな力学とは無縁な方法で）「こっそり」エネルギーをやりとりする．いわゆる「熱」の移動だ*4)．上の 1, 2 を満たす断熱操作は，系が周囲の環境と熱をやりとりしない場合にかぎって実現されるのだ．図 1 で，容器の壁やピストンが断熱材でできているなら，この操作は断熱操作になる．

平衡状態 (U, V, n) に対して断熱操作を行い，エネルギーを U'，体積を V' に変化させたとする．操作の後（やはり系は孤立しているとして）長い時間がたてば，系は新しい平衡状態 (U', V', n) に落ち着くはずだ．このように，一つの平衡状態か

*2)　物質が分子の集まりである以上，物質量 n は正確には「とびとび」の値をとる．しかし，物質量をモルで計るようなマクロな立場からは，n は連続変数と区別がつかない．

*3)　断熱操作が存在することを「熱力学第一法則」という．

*4)　熱いコーヒーを部屋の中に置いておけば，力学的な変化をいっさい伴わずに，エネルギーを失う（つまり，冷める）．

ら出発して，断熱操作で別の平衡状態を得るプロセス全体を，

$$(U,V,n) \to (U',V',n) \tag{2}$$

のように表現しよう．

4. 断熱操作とエントロピー

断熱操作の一例として，系の体積 V を適当に増減させて（つまり，ピストンを引いたり押したりして）最後はもとの体積 V に戻す操作

$$(U,V,n) \to (U',V,n) \tag{3}$$

を考えよう．体積は変わらなくても，外からの仕事でエネルギーは変わるから，操作後のエネルギーを U' とした．様々な系での実験によると，(3) のような断熱操作では，かならず $U \leq U'$ という大小関係が成り立つ．つまり，操作者の行う仕事 $W = U' - U$ は必ず正（または0）なのである．操作をいろいろと工夫すれば W が負にできそうな気がするかも知れないが，実際にやってみると，決してうまくいかない*5)．

まとめれば，(3) の断熱操作は，$U \leq U'$ のときには可能だが，$U > U'$ のときには絶対に不可能である．このように，**断熱操作には，可能なものと不可能なものがある**．力学の世界とはまったく異なった，熱力学の世界ならではの特徴である．

一般の断熱操作 (2) が可能か不可能かも，**エントロピー**と呼ばれる一つの関数で完全に決定できることが知られている．**エントロピー原理**と呼ばれるこの事実をきちんと述べよう*6)．**系の性質を反映して決まるパラメター空間 $\mathcal{E}$ 上の関数 $S(U,V,n)$ がある．断熱操作 $(U,V,n) \to (U',V',n)$ が可能であるための必要十分条件は，不等式**

$$S(U,V,n) \leq S(U',V',n) \tag{4}$$

が成り立つことである（図 2 を参照）．

*5) たとえば，冬の寒い日に両手をこすり合わせると，手は（表面のエネルギーが増加し）かならず暖かくなる．これも，本質的には，上の事実と同じことである．

*6) これは「熱力学第二法則」の一つの表現である．ちなみに，高校の「熱力学」には第二法則もエントロピーも登場しない．これは，言ってみれば，エネルギー抜きで力学を語ろうとするようなものだ．

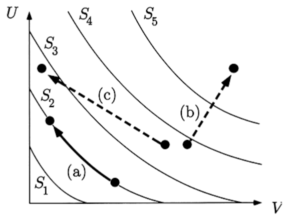


図 2　分子数 N を一定にしたパラメター空間での等エントロピー線の概略図．ここで，$S_1 < S_2 < \cdots < S_5$ である．エントロピーを一定に保つ (a) やエントロピーが増加する (b) の断熱操作は可能だが，(c) のようにエントロピーが減少する操作は不可能である．

さらに，エントロピーは，任意の $\lambda > 0$ について

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda n) = \lambda\, S(U,V,n) \tag{5}$$

という示量性をもつ．また，二つの平衡状態 (U_1,V_1,n_1) と (U_2,V_2,n_2) を合わせて一つの系と見なしたもののエントロピーを，相加性

$$\begin{aligned} &S[\{(U_1,V_1,n_1),(U_2,V_2,n_2)\}] \\ &= S(U_1,V_1,n_1) + S(U_2,V_2,n_2) \end{aligned} \tag{6}$$

にもとづいて定義すると，エントロピー原理がさらに一般の場合に拡張できる．つまり，二つの平衡状態 (U_1,V_1,n_1) と (U_2,V_2,n_2) を合わせたものに対して，任意の断熱操作を行い，新たな平衡状態 (U_1',V_1',n_1) と (U_2',V_2',n_2) になったとする．このような断熱操作が可能な必要十分条件は，

$$\begin{aligned} &S[\{(U_1,V_1,n_1),(U_2,V_2,n_2)\}] \\ &\leq S[\{(U_1',V_1',n_1),(U_2',V_2',n_2)\}] \end{aligned} \tag{7}$$

が成り立つことである．この場合，全系のエントロピーが減少しないなら，一方の系のエントロピーは減少してもかまわないことに注意したい．

このように，エントロピーは，マクロな世界で**「何が可能で何が不可能か」を定量的に定める指標と**

見ることができる*7)．物理学の体系の中でも，独自の位置づけをもつきわめて興味深い量である．**エントロピーの正体は，いったい何なのかというのが**，この解説であつかう二つ目の疑問である．

5. ミクロな力学の視点：二つ目の「空間」

ここからは，マクロな系も分子からできているというミクロな視点をとり，三次元的な領域 $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ の中に，N 個の質量 m の分子が入った系を考える．ミクロな世界での物理の基本法則は量子力学だが，ここでは，分子たちはニュートン力学に従うと仮定して話を進めよう*8)．

ミクロな視点から系の状態がどのように指定されるかをみよう．まず，N 個の分子に $i = 1, 2, \cdots, N$ と通し番号をつける*9)．そして，分子 i の位置座標を $\boldsymbol{r}_i \in \Lambda$，運動量（速度に質量 m をかけたもの）を $\boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^3$ とする．

系全体のある瞬間での状態をミクロな立場から完全に指定するためには，すべての粒子の位置と運動量が必要である．これらすべてをずらりと並べたものを，まとめて，

$$\gamma = (\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_N) \tag{8}$$

のように書く．右辺の括弧の中には，三成分の量が $2N$ 個ならんでいるのだから，全体では $6N$ 個の成分がある．ミクロな状態 γ が動き得る範囲全体の集合を $\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ と書き，**フェイズ空間**と呼ぼう*10)．この解説に登場する二つ目の「空間」だ．

上の議論から明らかなように，フェイズ空間は $6N$ 次元の空間である（集合的な記法に慣れている読者には，$\mathcal{P}_{\Lambda,N} \cong \Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N} \subset \mathbb{R}^{6N}$ と書いた方がわかりやすいだろう）．N は 10^{23} といったオーダーの巨大な数だから，フェイズ空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ はとてつもなく大きな空間である．そして，N 個の粒子たちの位置と運動量は時々刻々と（ニュートン方程式に従って）変化するから，ミクロに見た状態 γ はフェイズ空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ の中を，複雑な軌跡を描きながら，絶えず動きまわるのである．

*7) 実用的な熱力学では，エントロピーから出発して，他の物理量を計算すること，エントロピーによって系の状態方程式を完全に記述すること，などができる．

*8) 量子力学でも古典力学でも，ミクロとマクロを結ぶ基本的なアイディアは同じだ．

*9) 本当は，同種の粒子に名前をつけて区別することはできないのだが，そのことを考えなくても本質的な問題はない．

*10) 英語は phase space．定訳は位相空間だが，topological space の意味での位相空間と紛らわしい．しかも，この場合の phase は「変化し続けるものの一つの姿」といった意味なので，「波の位相」という意味の phase の訳語として定着している「位相」を使うのは適切とは思えない．

6. 平衡状態のミクロな特徴づけ

「平衡状態とはいったい何か」という一つ目の疑問の答えを探ろう．熱力学のパラメター空間 $\mathcal{E}$ とミクロな力学のフェイズ空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ という二つの「空間」がどのように対応するかという問題といってもよい．

熱力学の平衡状態，つまりパラメター空間 $\mathcal{E}$ の一点 (U, V, n) をとろう．

これに対応させるため，Λ を体積 V の適当な領域とし，分子数を $N = nN_\mathrm{A}$ のようにとる（$N_\mathrm{A} \simeq 6.02 \times 10^{23}$ はアヴォガドロ数）．フェイズ空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ は，体積 V，物質量 n の系をミクロな立場から記述すると考えられる．

エネルギー U について考えるため，フェイズ空間の点 $\gamma = (\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_N)$ に，力学的エネルギー

$$E(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{2m} + u(\boldsymbol{r}_i) \right\} + \sum_{i<j} v(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) \tag{9}$$

が対応するとしよう．ここで，第一項は個々の分子の運動エネルギーと外力によるポテンシャルエネルギー，第二項は粒子間の相互作用によるポテンシャルエネルギーである*11)．

力学的エネルギー $E(\gamma)$ は，マクロに見たエネルギー U に対応する．しかし，マクロ系のエネルギーを無限の精度で決めることは（原理的にも実際的にも）できない．エネルギーは，適当な精度 $\epsilon > 0$ の範囲のみでしか定まらないとしよ

*11) 第二項の和は $i < j$ を満たすすべての i, j の組（全部で $N(N-1)/2$ 通りある）についてとる．

う[*12)]．マクロな平衡状態 $(U,V,n)\in\mathcal{E}$ には，$U-\epsilon\le E(\gamma)\le U+\epsilon$ を満たすミクロな状態 $\gamma\in\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ が対応することになる．このような γ すべての集合を $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ と書く（図 3 の左図）．

平衡状態の正体はまだわからない．今のところ，一つのマクロな平衡状態 (U,V,n) に対して，フェイズ空間の部分空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ に属する膨大なミクロ状態が対応している．大きな空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ の中から，平衡状態にぴたりと対応する特別の一点を選び出す何らかのルールがあるのだろうか？

実は，フェイズ空間の中から平衡状態を記述する特別な一点を見つけてくるルールなどはないし，そもそも，そんなルールは必要ない．それとは正反対に，**フェイズ空間の部分空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ に属する状態のほとんどすべては，マクロに見ればそっくり同じだと仮定しさえすれば，**平衡状態についてのすべてが単純明快に理解できるのだ．もちろん，その「そっくり同じ」ふるまいが平衡状態の性質を表していることになる．

言うまでもなく，フェイズ空間の部分空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ の中には，エネルギーがほぼ U に等しいという条件を満たすすべてのミクロな状態が含まれている．それらの中には，すべての粒子が容器の左半分に集まった状態や，すべての粒子が同じ方向にむかって飛んでいる状態のような，平衡状態からはほど遠いものも無数にある．しかし，それらはきわめて「少数派」のまれな状態であり，それら例外的な状態を除いたほとんどすべての状態は，(少なくともマクロな視点からは) そっくりに見える「多数派」だと仮定しようというのだ[*13)]．

すると，フェイズ空間の部分空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ の中の状態 γ を一つ虚心坦懐に選んでくれば，それはほぼ確実に，マクロな平衡状態 (U,V,n) のふるまいを示すことになる．特別な事情があって最初に選んだミクロ状態が平衡状態から遠い「少数派」だったとしても，時間発展によって系の状態が $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ の中を動いていくと，ほどなく「少数派」の領域から抜け出して，多数派である平衡状態に対応する領域に入ることになる．これが，マクロ系の状態が平衡状態に近づいていくメカニズムの基礎だと考えられる．

*12) 体積やモル数についても同じことが言えるのだが，それらの点は気にしても気にしなくても話は変わらない．

*13) もちろん，これは最終的には証明すべき命題だ．性質のよい系については（統計力学を通した）間接的な証拠がある．

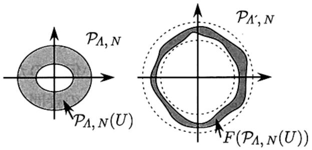


図 3 フェイズ空間とその部分空間の模式図．フェイズ空間は $6N$ 次元空間だが，無理に二次元に描いた．左はフェイズ空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ とその部分空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$．$\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ は（エネルギーで計って）幅 2ϵ（実際には細い幅だが異常に強調して描いた）の帯状の領域である．右はフェイズ空間 $\mathcal{P}_{\Lambda',N}$．二つの点線で囲まれた幅 2ϵ の領域が $\mathcal{P}_{\Lambda',N}(U')$ である．その中に，像 $F(\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U))$ が含まれている．この包含関係がエントロピーの正体を知る鍵になる．

こうして，一つ目の疑問への答えが得られた．**マクロな平衡状態 (U,V,n) は，ミクロな視点では，フェイズ空間の部分空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$（の中のほとんどすべての状態）に対応するのである．**

7. エントロピーのミクロな表式

つづいて，「エントロピーとは何か」という二つ目の疑問の答えを探ろう．

系に外界から操作を行うことは，ミクロな視点では，力学系の境界条件と外力ポテンシャルを時間とともに変化させることに対応する．そのような変化に伴って，N 個の粒子の運動を支配するニュートン方程式も時々刻々と変化していく．そのような時間依存のニュートン方程式の解が，この系のミクロな時間発展に対応する．ニュートン方程式で記述できる以上は，「力学的にわからないエネルギーのやりとり」はあり得ない．これは，断熱操作のミクロな記述であると考えてよい．

今，適当な初期時刻と終時刻を固定し，その間

に外界からある決まった操作を行うことにする．対応して，初期時刻から終時刻までの時間発展を記述する時間依存のニュートン方程式が定まる．その方程式により，初期状態 $\gamma \in \mathcal{P}_{\Lambda,N}$ が終状態 $F(\gamma) \in \mathcal{P}_{\Lambda',N}$ に写されるとしよう．操作後の領域が Λ' となっているのは，操作によって容器の形状が変わり得るからである．

時間発展の写像 $F(\cdot)$ はきわめて複雑なもので，一般には，これを正確に知る術などない．しかし，力学についての一般的な理論によって，以下の二つの重要な性質がわかっている*14)．

1. F は，$\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ から $\mathcal{P}_{\Lambda',N}$ への一対一の写像である．

2. Ω を $\mathcal{P}_{\Lambda,N}$ の任意の部分空間とし，$F(\Omega)=\{F(\gamma)\,|\,\gamma\in\Omega\}$ を Ω の像とする．Ω と $F(\Omega)$ の $6N$–次元体積は等しい．

この二つの性質に，エントロピーの正体を解く鍵がある．

マクロな断熱操作 $(U,V,n)\to(U',V',n)$ を考えよう．平衡状態とフェイズ空間の部分空間の対応関係を考えると，ミクロな初期状態 $\gamma\in\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ に対応する終状態 $F(\gamma)$ は $\mathcal{P}_{\Lambda',N}(U')$ の中にあるといえる．つまり，$F(\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U))\subset\mathcal{P}_{\Lambda',N}(U')$ という包含関係が成り立つ（図 3）*15)．

ここで，フェイズ空間の $6N$–次元体積（以下，単に体積という）を考えよう．部分空間 $\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U)$ の体積を $W_{\Lambda,N}(U)$ とする．上の 2 により，像 $F(\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U))$ の体積も $W_{\Lambda,N}(U)$ に等しい．ところが，像 $F(\mathcal{P}_{\Lambda,N}(U))$ は $\mathcal{P}_{\Lambda',N}(U')$ の部分空間だから，$\mathcal{P}_{\Lambda',N}(U')$ の体積を $W_{\Lambda',N}(U')$ とすれば，

$$W_{\Lambda,N}(U)\le W_{\Lambda',N}(U') \tag{10}$$

という不等式が成立する．これは，エントロピー原理の不等式 (4) と完璧に対応している！ 純粋な力学的な議論からこのような不等式が出てくるところが，このストーリーの要だ．図 3 をもう一度みて，この仕掛けが「腑に落ちる」までイメージを膨らませていただけるとうれしい．

「エントロピーとはフェイズ空間の体積だ」と結論したくなるが，それは早計だ．明らかに，$W_{\Lambda,N}(U)$ の任意の増加関数が不等式 (4) を満たすからだ．ここで，エントロピーの相加性 (6) を考慮にいれると，エントロピーの形を決定することができる．今，体積 V_1，物質量 n_1 の系と，体積 V_2，物質量 n_2 の系の二つがあるとする．それぞれのフェイズ空間は，$\mathcal{P}_{\Lambda_1,N_1}$，$\mathcal{P}_{\Lambda_2,N_2}$ である．これら二つを，まとめて一つの系と見なすと，対応するフェイズ空間は $\mathcal{P}_{\Lambda_1,N_1}\times\mathcal{P}_{\Lambda_2,N_2}$ という積になる．平衡状態 (U_1,V_1,n_1) と (U_2,V_2,n_2) に対応するそれぞれフェイズ空間の部分空間の体積は，それぞれ，$W_{\Lambda_1,N_1}(U_1)$ と $W_{\Lambda_2,N_2}(U_2)$ である．平衡状態 (U_1,V_1,n_1) と (U_2,V_2,n_2) を合わせて一つの状態と見なせば，対応するフェイズ空間の部分空間の体積は，二つの体積をかけ合わせた $W_{\Lambda_1,N_1}(U_1)\,W_{\Lambda_2,N_2}(U_2)$ になる．積が和に変わればいいのだから，対数をとり，

$$S(U,V,n)=k\log W_{\Lambda,N}(U) \tag{11}$$

としてやれば，マクロなエントロピーのもつ性質が完璧に再現される．k は任意の定数だが，通常はボルツマン定数 $k\simeq1.38\times10^{-23}$ J/K にとり，エントロピーの単位を熱力学と一致させる．

マクロな世界で「何が可能で何が不可能か」の定量的な指標を与えるエントロピーとは，**平衡状態に対応するフェイズ空間の部分空間の体積の対数**と解釈することができる．これが二つ目の疑問への答えである．ボルツマンによるこの深い洞察が，ミクロな力学とマクロな熱力学を定量的に結びつける鍵となり，そこから平衡統計力学という現代物理学の一つの基盤が生まれたのである．この魅力的な物語については，また別の機会にじっくりと解説できればと思う．

*14) 解析力学の教科書を参照．2 はリウヴィルの定理．

*15) 正確には，わずかな「はみ出し」があってもよいが，はみ出す部分の体積は小さくて無視できる．

参考文献

1) 熱力学については，田崎晴明『熱力学：現代的な視点から』（培風館，新物理学シリーズ）とその中の文献を参照．統計力学の教科書は多いが，今のところおすすめできる本はない．

（たざき・はるあき，学習院大学理学部）

素粒子論から見た「時空」

江口　徹

1. 超弦理論と時空

通常の物理学の理論では，時間や空間はいくらでも細かく分割することが可能で，我々が住んでいる4次元時空はいわば連続媒質のようなものと考えている．アインシュタインの一般相対性理論においても時間・空間は連続的なものであることが仮定されている．また，時間・空間は自然界におけるその最も基本的な枠組み，舞台装置であってその上に様々な登場人物（素粒子や星，銀河など）が現れると考える．相対性理論によれば，登場人物の影響で舞台の形が歪んだりするが，あくまで時空が第一義的でありそこに現れる物質は2次的なものと考えられる．

素粒子の超弦理論はこうした我々の持つ古典的な時空概念に重要な変更を迫る可能性を秘めている．ご存知のように超弦理論は重力を含めた統一理論の最も有力な候補であるが，特に宇宙初期などの微視的な世界での重力理論を建設することがその目標の一つとなっている．微視的な世界においては時間や空間も大きな量子論的揺らぎを持つと考えられるため，時間･空間に関する我々の通念に重要な変更が要求される可能性が高い．超弦理論はまだまだ未完成な理論であるが，現在進められている研究からは我々の時空概念に関する様々な修正の可能性が提起されている．これらはまだまとまった原理や描像の形を取ってはいないが，

- 時間・空間に最小の長さが存在する可能性，
- 時間・空間が最も基本的ではなく，より基本的な別のものから導き出される可能性，
- 時間・空間のトポロジーが特異性を生じることなく自由に変化し得る可能性，

などが指摘されている．また，時空の特異点とその付近での弦理論の様子は特に興味があるが，

- オービフォルド型と呼ばれる特異点の解消から非可換ゲージ対称性が生成されること，

が知られており，また

- コニフォルドと呼ばれる特異点の解消に関しては，一種のゲージ理論／重力理論対応である幾何学転移と呼ばれる興味深い現象が存在する．

この解説ではこれらの弦理論が提起する時空概念の変更について見てみよう．なお，

- 特定の場（NSセクターのB場）が存在する時空では，座標同士の非可換性が生じ非可換な時空が得られる

ことは良く知られているが，すでに解説記事[1]が出ているので省略することにしたい．

2. T双対性と最小の長さ

まず，いわゆる弦理論のT双対性と呼ばれるも

のを紹介しよう．超弦理論は10次元の時空に存在する．ここではそのうちの一つの（空間）方向が周期的で半径 R の円周になっている場合に注目しよう．この方向に沿った弦の運動を考えそのエネルギー準位を計算してみる．量子力学で良く知られていることであるが，半径 R の円周上を運動する粒子の運動量 p は $1/R$ の単位で量子化される．即ち，許される（弦の重心の）運動量の値は $p=n/R$（n は整数）となる．一方，弦は円周の周りに巻き付くことができる．閉じた弦が円周に m 回巻き付いた場合を考えると弦の長さは $2\pi mR$ になる．このような運動量と巻き付き数を持つ弦のエネルギーは

$$E=\sqrt{\left(\frac{n}{R}\right)^2+\left(\frac{mR}{l_s^2}\right)^2} \qquad (1)$$

で与えられる．ここで l_s は弦の長さのスケールを表す量で $10^{-33}\,\mathrm{cm}$ 程度の値を持つ．

(1) は次のようにして導ける．弦は単位の長さあたり $1/2\pi l_s^2$ のエネルギーを持つことが知られているので，長さ $2\pi mR$ の弦は $2\pi mR/2\pi l_s^2=mR/l_s^2$ の質量を持つ．この弦が運動量 $p=n/R$ で運動するとき，アインシュタインの関係，エネルギー $=[(\text{運動量})^2+(\text{質量})^2]^{1/2}$ を用いると (1) が得られる．

(1) 式の特徴は，半径を逆転する

$$R\to l_s^2/R \qquad (2)$$

と同時に運動量と巻き付き数を入れ替える $n\to m$ とエネルギー E が不変に留まることで，この性質は T 双対性と呼ばれている．T 双対性のため，弦理論ではサイズ R の円周上とサイズの l_s^2/R の円周上での運動が全く同一に見えるという特別な事情が生じる．通常の粒子の運動の場合には，弦の巻き付き数から来る (1) の第二項がないので粒子のエネルギーは常に空間的な大きさ R に逆比例する．このため大きなエネルギーを注ぎ込むことによっていくらでも小さな領域の空間を調べることができる．一方弦理論ではエネルギーの高い弦を送り込んでも弦がエネルギーと共に広がってしまうため，$R\sim l_s$ 程度より小さい領域を探ることはできない．弦理論においては半径 R が l_s^2/R と同等の役割を果たすため，R を小さくしていっても零に到達することはできず l_s 付近で「折り返して」増加に転じてしまう．即ち弦理論には空間距離 R に**最小値** l_s が存在するように見える．

このTデュアリティーの現象をどう考えるべきか未だ確立した解釈は存在しない．しかし何らかの意味で弦理論に最小の長さが存在することを示唆しているように思われる．最小の長さ以下では時空は量子論的に「溶けてしまって」幾何学的な空間としては記述されなくなってしまう．

超弦理論で有名な**ミラー対称性**はT双対性と良く似た性質を持っている．今，一つのカラビ・ヤウ (Calabi–Yau) 多様体 K が与えられたとき，常にその鏡映（ミラー）のカラビ・ヤウ多様体 $\tilde{K}$ が存在することが知られている．K と $\tilde{K}$ は異なるトポロジーを持ち（$h^{1,1}(K)=h^{2,1}(\tilde{K})$, $h^{2,1}(K)=h^{1,1}(\tilde{K})$．ここで $h^{p,q}$ はホッジ数）幾何学的には全く異なる多様体であるが弦理論にとってはこの2つの多様体は同一に見える．実際，鏡映のカラビ・ヤウ多様体 $\tilde{K}$ が K からT双対によって得られるという SYZ (Strominger–Yau–Zaslow) の予想がある．即ちカラビ・ヤウ多様体 K があるベース空間上に3次元トーラス T^3 をファイバーした形をしている場合には，3次元トーラスに関してT双対を取ることにより $\tilde{K}$ が得られる．一般のカラビ・ヤウ多様体が T^3 (Lagrangian) fibration を持つかどうかは難しい問題であるが，SYZ予想がミラー対称性の本質の一端を捕えていることは確かなようである．

このように，弦理論で見る世界は通常の古典的幾何学とはかなり異なったものになっている．次は，弦理論においては古典的な時空が幾何学的な意味を持たない対象とパラメーターの変化の下で連続的につながっている場合を見てみよう．

3. カラビ・ヤウ／ランダウ・ギンツブルグ対応

超対称性を持つ場の理論では，一般に理論の基

底状態に高い縮退が存在し，いくつかのパラメーターを持った基底状態が存在する場合がある．これらのパラメーターが張る空間を**真空のモジュライ空間**と呼ぼう．これらのモジュライ空間が知られた幾何学的な空間 K，種々のカラビ・ヤウ多様体など，に一致するように場の理論のモデルを構成することができる．このとき場の理論の模型は対象 K を記述する幾何学的相にあるということにしよう．

一方，幾何学的相にある場の理論のモデルのパラメーターを変化させると，突然時空 K が消滅し場の理論が非幾何学的な相に移ることがある．即ち幾何学的空間と非幾何学的な対象がパラメーターの変化で連続的に移り合う．K としてカラビ・ヤウ多様体を選ぶと，非幾何学的な相は超伝導理論で知られたランダウ・ギンツブルグ（Landau–Ginzburg）型のモデルで記述されるためこの現象はカラビ・ヤウ／ランダウ・ギンツブルグ対応と呼ばれる．カラビ・ヤウ／ランダウ・ギンツブルグ対応を用いると，カラビ・ヤウ多様体の幾何学をランダウ・ギンツブルグ理論を用いて記述することが可能となる．

こうした現象を調べるためには，ゲージ化された線形シグマ模型（Gauged Linear sigma Model (GLσM)）を用いるのが便利である[2]．ゲージ化された線形シグマ模型は 2 次元の $U(1)$ ゲージ理論でいくつかの複素スカラー場 $\{\phi_i\}$ からなる．以下では理論が超対称性を持つ場合を考えよう．超対称性を持つ理論ではスーパーポテンシャルと呼ばれる量 $W(\phi_i)$ の微分と D 項と呼ばれる項から通常のポテンシャルエネルギー V が導かれる．

$$V(x) = \sum_i \left|\frac{\partial W(\phi_i)}{\partial \phi_i(x)}\right|^2 + \frac{e^2}{2}\left(\sum_i Q_i|\phi_i(x)|^2 - r\right)^2 . \quad (3)$$

（正確にはポテンシャルはさらに多くの項を含むが本質的でないので省略する．）ここでスーパーポテンシャル W は複素スカラー $\{\phi_i\}$ のみに依存し，その複素共役 $\{\phi_i^*\}$ には依存しない．理論の基底状態では一般に場 $\phi_i(x)$ は 2 次元座標 x_1, x_2 についての依存性を持たなくなる．このため 2 次元の場 ϕ_i を単なる複素数と見なすことができる．するとスーパーポテンシャルは ϕ_i の正則関数となる．

(3) の第 1 項は F 項，第 2 項は D 項と呼ばれる．D 項の前の因子 e^2 は $U(1)$ ゲージ理論の結合定数，Q_i は場 ϕ_i の持つ電荷，実数 r はファエ・イリオプーロス(Fayet–Iliopoulos)パラメーターと呼ばれる量である．

超対称性を持つ理論のポテンシャル (3) の特徴はその値が決して負にならない；

$$V \geq 0 \quad (4)$$

ことである．理論の基底状態において $V = 0$ となる場合には超対称性が保たれるが，$V > 0$ となる場合には超対称性が自発的に破れることが知られている．

(3) で $V = 0$ を要求すると

$$\frac{\partial W(\phi_i)}{\partial \phi_i} = 0, \quad \sum_i Q_i|\phi_i|^2 = r \quad (5)$$

となる．

ウィッテン（Witten）は特に，電荷が 1 の複素スカラー場 X_i が 5 個（$i = 1, 2, \cdots, 5$），電荷が -5 の複素スカラー場 S が 1 個ある場合を考えた．スーパーポテンシャルは全電荷が零になるように

$$W = SG(X_i) \quad (6)$$

ととる．ここで $G(X_i)$ は X_i についての 5 次の多項式である．すると超対称性を保つ真空 (5) の条件は

$$G(X_i) = 0, \quad S\frac{\partial G}{\partial X_i} = 0, \quad (i = 1, \cdots, 5), \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{5} |X_i|^2 - 5|S|^2 = r \quad (8)$$

に帰着する．

パラメーター r が正の場合，負の場合に分けて考えよう．

♣ $r > 0$ の場合

(8) 式を満たすためには $X_i \neq 0$ でなければならない．そこで $S = 0$ とおくと (7), (8) が簡単化されて

$$G(X_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{5} |X_i|^2 = r \tag{9}$$

を得る．(9) の第 2 式から $\{X_i\}$ は 9 次元球面を張ることが分かるが，今その位相は $U(1)$ ゲージ対称性により取り除かれているため

$$\frac{S^9}{U(1)} = \boldsymbol{P}^4 \tag{10}$$

となる．$\boldsymbol{P}^4$ は 4 次元の複素射影空間である．したがって $\{X_i\}$ は $\boldsymbol{P}^4$ の斉次座標と見なされる．更に 5 次式 $G(X_i)$ を例えば $G(X_i) = \sum_{i=1}^{5} X_i^5 - 5\psi X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$（$\psi$ はパラメーター）とおくと (9) は

$$\sum_{i=1}^{5} X_i^5 - 5\psi X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 = 0, \quad (X_1, \cdots, X_5) \in \boldsymbol{P}^4 \tag{11}$$

となり，結局 $\boldsymbol{P}^4$ 中の 5 次の超曲面，即ち典型的なカラビ・ヤウ多様体が得られる．

したがってパラメーター r が正のときには真空のモジュライ空間はカラビ・ヤウ多様体に一致し理論は幾何学的相にある．

$\boldsymbol{r > 0}$,

真空のモジュライ空間＝カラビ・ヤウ多様体． (12)

次に $r < 0$ の場合を考えよう．

♣ $r < 0$ の場合

(8) 式を満たすためには $S \neq 0$ でなければならない．すると (7) 式から

$$\frac{\partial G}{\partial X_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, 5 \tag{13}$$

が得られる．多項式 G が斉次式の場合には $\partial G/\partial X_i = 0$ より

$$X_i = 0, \quad i = 1, \cdots, 5 \tag{14}$$

となる．したがって，この場合モジュライ空間は一点 $(X_i = 0, i = 1, \cdots, 5)$ につぶれる．

一般にスーパーポテンシャルの微分が零で（一意的な）基底状態が定まる 2 次元のモデルは超伝導理論との類似からランダウ・ギンツブルグ型理論と呼ばれる．$G(X_i)$ が X_i についての斉次式の場合には，$\partial G/\partial X_i = 0$ から $G(X_i) = 0$ が導かれるので (7) の第 1 式も満たされる．

$\boldsymbol{r < 0}$,

モジュライ空間 ＝ 一点． (15)

これは非幾何学的相を表す．

パラメーター r は式 (9) に見るように 9 次元球面の半径を表している．したがって幾何学的領域では $r > 0$ でなければならない．$r < 0$ になると球面はつぶれて非幾何学的領域に移行する．

このとき $r = 0$ が理論の特異点となるかどうかが重要な問題となる．ここでは詳しく述べられないが理論のインスタントン角 θ まで考えると，r は複素数 $r + i\theta$ のパラメーターとなり，$r = 0$ の特異点は $\theta \neq 0$ ととることによって回避できることが示される．したがって，**幾何学的な相と非幾何学的な相が連続的に移り合う**．このためカラビ・ヤウ（CY）多様体の幾何学をランダウ–ギンツブルグ（LG）模型で記述することが可能となる．これを CY ／ LG 対応と呼ぶ．種々の位相不変量，例えば楕円種数などは LG 模型を用いて容易に計算される．なお，ここで述べた関係は K が CY 多様体以外の場合でも成り立つことが知られている．ただしこのとき K がスピン多様体であることが必要である．

4．トポロジー変化：フロップ

上で用いた模型を使うと弦理論におけるトポロジー変化の様子を簡単に示すことができる．以下で述べるトポロジー変化は代数幾何学でフロップと呼ばれる現象である．

ゲージ化された線形シグマ模型に戻って，複素スカラーが 4 つある場合を考えよう．即ち場 A_i $(i = 1, 2)$ は電荷 $+1$ の場，B_j $(j = 1, 2)$ は

電荷 -1 の場とする．理論にスーパーポテンシャルは存在しない場合を考える．するとポテンシャル V は D 項のみからなり

$$V=\frac{e^2}{2}\left(\sum_i |A_i|^2-\sum_j |B_j|^2-r\right)^2 \quad (16)$$

で与えられる．以前と同様に r の正負に分けて考えると

- $r>0,\quad V=0 \implies \quad \sum_{i=1}^{2}|A_i|^2=r,$
- $r<0,\quad V=0 \implies \quad \sum_{j=1}^{2}|B_j|^2=-r$

を得る．

$\sum_i |A_i|^2=r$ は 3 次元球面 S^3 を表すが $U(1)$ ゲージ対称性があるため $U(1)$ で割ると

$$\frac{S^3}{U(1)}=S^2=\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{a}}. \quad (17)$$

即ちこの場合，場 $\{A_i\}$ の真空期待値が $\boldsymbol{P}^1$ を張っている．このため $\boldsymbol{P}^1$ に添字 a を付けた．このとき場 $\{B_j\}$ の期待値は零である．一方，$r<0$ の場合には場 A_i と B_j の役割が入れ代わり，場 $\{B_j\}$ の期待値がもう一つ別の $\boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{b}}$ を張る．

即ち，$r>0$ から出発すると膨らんでいた $\boldsymbol{P}^1$ が $r\to 0$ と共につぶれ，$r<0$ の領域では別の $\boldsymbol{P}^1$ が膨らむ．これはいわゆるフロップと呼ばれる現象で代数幾何学で広く用いられる双有理変換の一種である．

5. オービフォルド特異点の解消と非可換ゲージ対称性

弦理論でしばしば現れる特異点にいわゆるオービフォルド (orbifold) 型の特異点がある．オービフォルド特異点は種々の空間を離散的な群で割ったとき，群作用の固定点に現れる．弦理論ではオービフォルド特異点を解消することにより非可換ゲージ対称性が現れることがあり，このためにオービフォルド特異点は基本的な重要性を持っている．

まず，最も簡単な複素 2 次元の Z_2 オービフォルド $\boldsymbol{R}^4/Z_2$ の場合を考えよう．$\boldsymbol{R}^4$ の座標を (x_1, x_2, x_3, x_4) ととると群 Z_2 は

$$Z_2:\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\to(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4) \quad (18)$$

のように働く．Z_2 で割った空間 $\boldsymbol{R}^4/Z_2$ を作るには鏡映関係にある 2 点 $P=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ と $P'=(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4)$ を同一視し，このうちの一つ，例えば P をキープして P' を捨ててしまえば良い．この操作は原点 $(0,0,0,0)$ 以外では矛盾無く定義されるが，原点は変換 Z_2 の固定点で孤立しているため Z_2 で割ることができずオービフォルド空間の特異点となる．

オービフォルド空間から特異点を取り除くには原点にある特異点を膨らませて (ブローアップ (blow up) して) スムーズにしてやる必要がある．ブローアップを行うと原点は 2 次元球面 S^2 に置き換えられる．球面 S^2 の半径 a はブローアップ・パラメーターと呼ばれる．一方 S^2 をつぶすと（ブローダウンすると）もとのオービフォルド空間に戻る．このときつぶれる S^2 がいわゆる消滅サイクル (vanishing cycle) を与える．Z_2 オービフォルド $\boldsymbol{R}^4/Z_2$ の特異性を解消した空間には次の自己双対曲率を持つ計量が存在することが知られている．

$$ds^2=\left(1-\frac{a^4}{r^4}\right)^{-1}dr^2+\frac{r^2}{4}\left(1-\frac{a^4}{r^4}\right)\sigma_z^2 + \frac{r^2}{4}\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right). \quad (19)$$

ここで (不変 1 形式) $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ は S^3 のオイラー角を用いて

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\sin\psi d\theta-\sin\theta\cos\psi d\phi,\\ \sigma_y&=-\cos\psi d\theta-\sin\theta\sin\psi d\phi,\\ \sigma_z&=d\psi+\cos\theta d\phi\end{aligned} \quad (20)$$

と表される．$r\to\infty$ で上の計量は

$$ds^2\to dr^2+\frac{r^2}{4}\left((d\psi+\cos\theta d\phi)^2+d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right)$$

となり，右辺第 2 項は 3 次元球面の計量に等しいため無限遠でユークリッド計量に一致するように見える．しかし，計量が $r=a$ で特異性を持たな

いことを要求すると，角度変数 ψ は S^3 の場合の領域 $[0,4\pi]$ と異なり S^3/Z_2 の領域 $[0,2\pi]$ をとらなければならないことが分かる．

即ち $r \approx a$ で $R=\sqrt{a(r-a)}$ と変数変換してみると

$$ds^2 \approx dR^2 + R^2 d\psi^2 + \frac{a^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{21}$$

となり，初めの2項 $dR^2 + R^2 d\psi^2$ が2次元平面 $\boldsymbol{R}^2$ の計量と一致して原点に特異性を持たないためには，ψ のレンジは $[0,2\pi]$ にならなければならない．このため計量 (19) が定義される空間の大域的なトポロジーはユークリッド空間と異なり ALE 空間（Asymmptotically Locally Euclidean Space）と呼ばれる．

タイプ IIA の弦理論を考えると，空間2次元に広がった D2 ブレーンが存在する．D2 ブレーンが消滅サイクルに巻き付くと質量が (D2 の張力) × (S^2 の面積) の粒子が作られる．この粒子はスピン1のベクトル粒子であるがサイクルが消滅するときにその質量が零になる．この粒子を W^+ と呼ぼう．同様にして裏返しの D2 ブレーンが消滅サイクルに巻き付くと W^+ の反粒子 W^- が得られる．一方，タイプ IIA 弦理論には3階反対称テンソル場 C_3 が存在するがこれを S^2 上で積分すると一形式，すなわちゲージ場が得られる．これを A_3 と呼ぼう．消滅サイクルがつぶれる極限で $W^\pm$ は零質量となり，$W^\pm, A^3$ の3つのベクトル場は $SU(2)$ のヤン・ミルズ場に転化する．すなわち消滅サイクルは $U(1)$ 対称性を $SU(2)$ に拡張する．

上の計量は江口とハンソン（A. Hanson）が導いたものであるが，ギボンズ（G. Gibbons）とホーキング (S. Hawking) はこれを $\mathbf{C}^2/Z_N$, $N=3,4,\cdots$ の場合に拡張した．これらの計量を持つ空間は A_{N-1} 型の ALE 空間と呼ばれる．ギボンズ・ホーキングの計量は

$$ds^2 = V(\vec{x})d\vec{x}\cdot d\vec{x} + V(\vec{x})^{-1}(d\tau + \vec{A}\cdot d\vec{x})^2,$$

$$\nabla V = \mathrm{rot}\,\vec{A}, \quad V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} \tag{22}$$

で与えられる．$N=1$ のときこの計量は実は平坦なユークリッド空間を表し，$N=2$ のときには適当な座標変換で江口・ハンソン計量 (19) に一致することが分かる．A_{N-1} 型 ALE 空間には $N-1$ 個の独立な消滅サイクルが存在し，$U(1)^{N-1}$ ゲージ対称性を $SU(N)$ ゲージ対称性に転換する．

6. コニフォルドと幾何学的転移

最後にいわゆるコニフォルド特異点と呼ばれるものを議論しよう．このタイプの特異点も弦理論に頻繁に登場して重要な役割を果たす．複素座標 (z_1,z_2,z_3,z_4) を用いるとコニフォルド型の特異点は局所的に

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0 \tag{23}$$

で記述される．コニフォルドは $S^2\times S^3$ 上の錐 (cone) の形を持ち，原点では S^2, S^3 共にその大きさが零になるため特異性を持つ．コニフォルド特異点の解消には2種類の方法が知られている．まず，複素構造を変形させて

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=\epsilon \tag{24}$$

とすると，3次元球面が膨らみ原点でもつぶれなくなる（$z_i = x_i + iy$ と置くと (24) から $x_1^2+\cdots+x_4^2=\epsilon$, $y_1=\cdots=y_4=0$ が導かれ半径 $\sqrt{\epsilon}$ の3次元球面が存在することが分かる）．これを **deformed conifold** と呼ぶ．

一方，S^2 をブローアップ（minimal resolution をとる）すると **resolved conifold** が得られる．Resolved conifold は $\boldsymbol{P}^1$ 上のバンドル $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$ の構造を持つ．Deformed conifold と resolved conifold は一種の双対関係にあり deformed conifold 上のゲージ理論と resolved conifold 上の重力（弦）理論の間に深い関係があることが知られている．

Deformed conifold には Lagrangian cycle である3次元球面が存在するため，タイプ IIA 理論の

D6 ブレーンが巻き付くことができ，ブレーン上のチャーン・サイモンズゲージ理論を考えることができる．一方，resolved conifold 上では A 型の位相的弦理論を考えることができ，チャーン・サイモンズゲージ理論と位相的弦理論の振幅が一致することが示される．これを幾何学的転移と呼んでいる．

この現象を説明するために，IIA 弦理論を M 理論に持ち上げて考えてみよう．すると $SU(3)$ ホロノミーを持つカラビ・ヤウ多様体は G_2 ホロノミーを持つ 7 次元多様体に置き換えられる．7 次元アインシュタイン方程式を解いて 3 次元球面を 2 つ含む解を探す．すると次の計量

$$ds^2 = \alpha(r)^2 dr^2 + \beta(r)^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\sigma^i - \frac{1}{2}\Sigma^i\right)^2 + \gamma(r) \sum_{i=1}^{3} (\Sigma^i)^2, \tag{25}$$

$$\alpha(r)^2 = \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)^{-1}, \quad \beta(r)^2 = \frac{r^2}{9}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right), \quad \gamma(r)^2 = \frac{r^2}{12} \tag{26}$$

を得る．不変 1 形式 $\{\sigma^i, \Sigma^i;\ i = 1, 2, 3\}$ は 2 つの S^3 のオイラー角で表される．この計量は特異点をもたないスムーズな空間を表し，例外的なホロノミー G_2 を持つことが知られている．

$r \geq a$ で $\gamma(r)$ は有限値をとるため上の計量の第 3 項は膨らんだ S^3 を表す．一方もう一つの球面 $S^{3'}$ の半径 $\beta(r)$ は $r \to a$ で零になり第 2 項は動径方向を表す第 1 項と合わせて $\boldsymbol{R}^4$ と同相の空間を表すことが分かる．したがって全体のトポロジーは $\boldsymbol{R}^4 \times S^3$ となる．

今，この空間を Z_N で割ってみよう．$\boldsymbol{R}^4$ を割るか S^3 を割るかに応じて 2 つの空間

$$\frac{\boldsymbol{R}^4}{Z_N} \times S^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{R}^4 \times \frac{S^3}{Z_N} \tag{27}$$

を得る．上の左辺は ALE 空間 $\times S^3$ の形をしており，したがって $SU(N-1)$ 対称性を持つ S^3 上のゲージ理論を表すと考えられる．一方右辺に現れるレンズ空間 S^3/Z_N は消滅サイクルを持たないのでゲージ対称性は生成されない．S^3/Z_N は S^2 上に N 単位のフラックスが存在する空間を与える．このため右辺は重力理論を記述すると考えられる．

(27) はアティヤ（M. Atiyah），マルダセナ（J. Maldacena）とヴァッファ（C. Vafa）によって指摘された関係で，左辺が IIA 理論の deformed conifold，右辺が resolved conifold に相当する．(27) は M 理論における一種のフロップを表すと考えられ，幾何学的転移は M 理論におけるトポロジー変化と解釈される．

7. 終わりに

このように，弦理論における特異点の解消には興味深い物理的な現象が付随している．我々の理解したい最も重要な特異点は宇宙初期のビッグバン特異点であるが，この特異点を弦理論でいかに捉えるかはまだ定説が無い．最近の面白いアイディアは，いわゆるタキオン凝縮という機構を用い時間 t が負の領域 $t < 0$ の空間を消してしまうことで時間の始まりを作ろうという試みである[3]．これは幾何学的相と非幾何学的相が隣り合う状況を記述する GLσM の場合と良く似ている．時間・空間は与えられたものではなく場の理論の解から作り出されるものと考える立場である．

これからの弦理論の発展でどのような新しい時空像が更に現れてくるのか大変に興味深い．

参考文献

1) 特集「可換から非可換へ」数理科学 2004 年 9 月号.
2) "Phases of N=2 Theories in Two Dimensions", Edward Witten, IASSBS-HEP-93/3.
3) 例えば
"The Tachyon at the End of the Universe", John McGreevy and Eva Silverstein, hep-th/0506130.

（えぐち・とおる，東京大学大学院理学系研究科）

相対性理論と時間・空間

細谷　暁夫

1. はじめに

時間と空間の概念については，古来多くの人が述べているが，とうてい語り尽くせないものがある．多分，物理学の枠内に収まらないものであって，人間の悟性にとって本質的なものなのだろう．物理学の役割は，時空の性質について物理学に帰着できる部分を明らかにして，人々の思考をより本質的なものへと向かわせることだとしたら，物理学者として卑下しすぎているだろうか？

古典相対性理論は，時空は局所的にミンコフスキー空間であり，連続的な座標系が導入できることを仮定している．これは，先験的なものとは言えず，せいぜい巨視的な対象に対して得られた経験から捨象された「仮定」である．従って，量子重力が問題になる程度に微視的な世界については，成り立たないかもしれないのである．まず，この時空を多様体としてみる古典相対論の時空観をおさらいし，それを量子化した場合どこが問題になりそうか，考えてみよう．

この問題を21世紀の現在に相対性理論と量子力学の融合と考える場合の新しい視点としては，認識論的なものがある．どのような測定をすれば時空の何が分かるか，を理論の定式化の段階から原理的に取り込むことであろう．実は，1905年のアインシュタインの特殊相対性理論は，認識論的に構成されている．その精神に敬意を表して，まずそこから話を始めよう[1)*1)]．

2. 特殊相対性理論

時空の中の点の位置を表す番地を導入すると便利である．それを座標系と呼ぶ．例えば，横軸に空間の位置を表す x，縦軸に時間を表す t を取ろう．こうしておけば，ある $x = X$ のところで時刻 $t = T$ で起きたイベントを座標値の組 (X, T) で表すことができる（図1）．グラフに書き込めば，時空上の点で表すことができるので，時空点と呼ぶ．これは数学を用いて物理の記述を合理化しているのである．

しかし，これは実験をする立場からすると何を想定しているのであろうか？

空間の位置を表すのには，同じ長さの固い棒多数をジャングルジムのように組んで，デカルト座標系を作ればいいだろう．時間に関しては，同じ性能の時計の時刻を合わせてジャングルジムの結節点に置けばその点の時刻が決まるだろう．

「x 座標が X のところで時刻 T で起きたイベント」というのは，X のところに置いてあった時計の針が T を指したときに，そのイベントが起きた，ということである．ここで，時刻を指定する

*1）20世紀に書かれた相対性理論の教科書は，光速不変の原理からミンコフスキー計量を導き，それを不変にする変換としてローレンツ変換を導く．これが典型例で，まず数学的な枠組みを作り上げておいて，S行列などの「観測量」の計算を最後に行い実験と比較するという理論構成を取っている．これは，「すっきり」してはいるが，量子重力に向かうときの重要なヒントを見落とすことにならないだろうか？[2)]

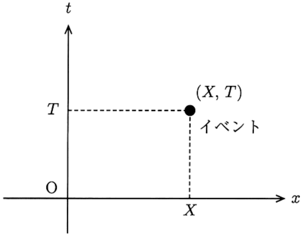


図 1　時空座標.

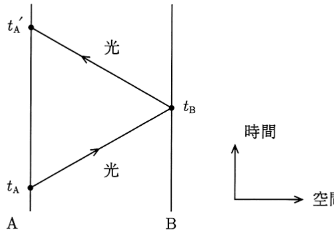


図 2　時計を合わせるのに, 光の信号を往復させる.

ということが，2 つ以上の出来事の「同時性」を述べていることに注意しよう.「7 時に電車が到着した」，ということを物理的に言えば「私の時計の短針が 7 を指し，長針が 12 を指したときと，電車がホームに停止したのが同時であった」ということになる[*2].

同一の場所に起きた 2 つのイベントの同時性の定義には曖昧さはほとんどないだろう．異なる 2 つの場所に起きた 2 つのイベントの同時性を主張するには，そこに置かれた時計たちを予め合わせておく必要があるが，実は，このことは自明でなく，慎重な定義を要する．アインシュタインに従って，異なる場所における同時性を定義しよう[1].

A と B の 2 カ所に静止している時計を合わせることを考えよう．A にある時計が時刻 t_A を指したときに，B に向かって光の信号を送り，B にいる別の観測者がそれを（B の時計で）時刻 t_B に受け取り，ただちに A に向かって光の信号を送り返す．これを，A の観測者は時刻 t'_A に受け取ることにしよう（図 2).

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

あるいは同じことだが,

$$t_B = \frac{t'_A - t_A}{2}$$

が成り立つときに,「A と B の時計が合っている」ことにしよう．すぐにはピンとこないかもしれないが，時計が合っていない場合を考えてみると何を言っているのかより分かる．B の時計が A の時計の 2 倍進みが速いとしよう．t_A が午後 0 時だったとしよう．A の時計で光の信号が返ってきた時刻を $t'_A = 2$ 時であるとしよう．一方，$t_B = 2$ 時であったとき B の観測者が報告してきたとすると，2 つの時計は合っていなく，B の時計が A の時計の 2 倍進みが速いと推定できる.

こうして合わせた時計が A と B に置いてあるとしよう．A と B に起きたイベントが同時であるとは，それぞれに置かれた時計の針が同じ時刻を指していることである.

「同時性」を物理的に定義するためには，事前に時計を合わせることと，イベントの事後に同時性を確認することが必要になる．そのために異なる場所にいる観測者の間のコミュニケーションが介在することは興味深い．相対論においてはそのコミュニケーションの手段として光という「もの」が使われている.

2.1 光速不変の原理

以上は，A と B の時計が静止している場合であるが，これらに対して運動している系においても同時性を定義する必要がある．その前提として，アインシュタインは次の 2 つの原理を置いた.

(1)　相対性原理

互いに他に対して一様な並進運動をしている，任意の 2 つの慣性座標系のうちで，いずれを基準にとって，物理系の状態の変化に関する法則を記述しようとも，そこに導かれる法則（の形）は座標系の選び方に無関係であ

*2)　人は「時を見る」ことなどできない．見ることができるのは，「時計」なのである．―寺山修司の仮面画報―

る[*3)].

物体の落下の法則を例にとって補足しよう．陸地で静止している人の記述する落下の法則は，一定速度で運行している船の甲板に立つ人の法則と全く同じはずである．例えば，どちらの場合も，手から離したボールは足下に落ちる．

(2)　光速不変の原理

いかなる光線もそれが静止した物体から放射されたか，運動している物体から放射されたかに関係なく常に一定の速さ c をもって伝搬する．

これは日常体験からくる直観に反するかもしれない．速度 v で観測者に近づく光源から出た光の速度は $c+v$ であり，逆に速度 v で観測者から遠ざかる光源から出た光の速度は $c-v$ であるような気がするからである．

ここに，光の速さとは

$$\text{速さ} = \frac{\text{光の進んだ距離}}{\text{光の伝搬に要した時間}}$$

によって定義される．「時間」については，前節で説明したやり方で合わせた時計を用いる約束の下で行うものとする．

(1) と (2) を合わせると，同一の光源から発する光の，静止している人の測定する光速と，新幹線の中で測定した光速は同じである，と主張できる．

2.2 ローレンツ変換――観測者の間の関係

前節では，静止している 2 つの時計を合わせることを述べた．この時計の合わせ方はどんな慣性系にも通用するはずだが，特に静止系に対して x 方向に v で運動している系 S′ に静止している 2 つの時計を同様の方法で合わせることを考えよう（図 3）．

S′ の時間座標を τ，x 方向と同じ方向にはかった空間座標を ξ としよう．今，時刻 $\tau=0$ に A 点 $(\xi=0)$ から B 点に向かって光を出して B 点で反射させ A 点に返す．B 点に到着した時刻を

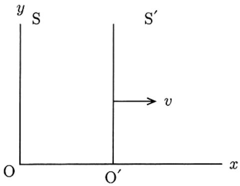


図 3　静止系 S に対して x 方向に v で運動している系 S′.

τ_1，A 点に戻ってきた時刻を τ_2 としよう．

A と B の時計が合っていることから

$$\tau_1 = \frac{\tau_2}{2}.$$

ここで，2 つの慣性座標の間の関係を上のような同時性の定義と整合するように決めよう．

$$\tau = \alpha(x - vt) + \beta t,$$
$$\xi = \gamma(x - vt)$$

と 1 次式の形で置いて，α, β, γ を求めよう[*4)]．$t=0$ で，S における AB 間の距離を l おけば，時刻 t での B 点の x 座標は $l+vt$ であることに注意しよう．B 点に光が到着した時刻を S 系で t_1 (S′ 系では τ_1) とし，A 点に戻ってきた時刻を t_2 しよう．したがって，

$$\tau_1 = \alpha l + \beta t_1 = \alpha l + \beta \frac{l}{c-v},$$
$$\tau_2 = \alpha \times 0 + \beta t_2 = \beta \left[\frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \right]$$

を得る[*5)].

$\tau_1 = \tau_2/2$ から，

$$\alpha = -\beta \frac{v}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

これを変換式に代入すると

*3)　ここでは慣性系の存在は仮定されている．この意味で相対論でもニュートンの第一法則は前提なのである．

*4)　アインシュタインの原論文では線形性を仮定していないが，私は必要と思う．ここでの意味ありげな書き方は単に，S′ 系の原点が S 系で $x = vt$ であることをあらかじめ考慮に入れて，話を早くするためのものである．

*5)　$t_1 = \frac{l}{c-v}$ を理解するのには，例えば次のように考えればよい．光は t_1 の間に ct_1 の距離を走る．一方，B はその間に vt_1 進むので光が走らなければならない距離は $l + vt_1$ である．その 2 つを等しいと置けば，$ct_1 = l + vt_1$ すなわち，$t_1 = \frac{l}{c-v}$ を得る．

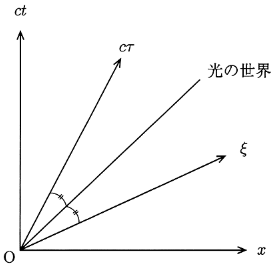


図 4 静止系 S とそれに対して x 方向に v で運動している系 S′ の関係を時空座標で示した．S の座標を (t,x)，S′ の座標を (τ,ξ) とする．原点から発射された光の世界線が共通であることに注意しよう．

$$\tau = \frac{\beta}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$
$$\xi = \gamma(x - vt)$$

を得る．

この結果を，以下のように幾何学的に見ることもできる．τ 軸は S′ 系の原点 $\xi = 0$ の軌跡，すなわち $x = vt = \frac{v}{c}ct$ であり，ξ 軸は $\tau = 0$ すなわち $ct = \frac{v}{c}x$ である．原点から発した光の世界線 $x = ct$ はこれらの 2 等分線になっている（図 4）．すなわち，光の軌跡は S′ 系でも同じである．さらに，座標 τ,ξ の刻みを決めるためにその光の世界線を $\xi = c\tau$ となるように決めてやれば，$\gamma = \frac{\beta}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ と決まる．以上をまとめれば，

$$\tau = \frac{\beta}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left[t - \frac{v}{c^2}x\right],$$
$$\xi = \frac{\beta}{1-\frac{v^2}{c^2}}(x - vt)$$

となる．ここまでは，光速不変の原理だけを使って議論している．

最後に，β を決めるために上の式を t,x について解こう．

$$t = \frac{1}{\beta}\left[\tau + \frac{v}{c^2}\xi\right],$$
$$x = \frac{1}{\beta}(\xi + v\tau).$$

ここで，S 系が S′ 系に対して $-v$ で運動していることを考えれば，これは

$$t = \frac{\beta}{(1-\frac{v^2}{c^2})}\left[\tau + \frac{v}{c^2}\xi\right],$$
$$x = \frac{\beta}{(1-\frac{v^2}{c^2})}(\xi + v\tau)$$

であるはずである．上の 2 式を比較して

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

すなわち，

$$\tau = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

これをローレンツ変換と言う．

3. 一般相対性理論

よく知られているように，一般相対性理論[3)]は，等価原理と一般相対性原理の上に立っている．等価原理は座標系を適当に選べば局所的に重力を消すことができて，時空がミンコフスキー時空であることを要求している．一般相対性原理は物理法則が座標系によらないことを要求している．局所的に見る限りミンコフスキー時空になる．

今まで，「時空」と言って時間と空間を一括して幾何学を考えてきた．ある意味で，この点に相対性理論の革命的なところがあったのだが，日常体験からしても，時間には順序があり空間とは違う．この違いは因果律に現れる．簡単のために，局所慣性系で 2 つのイベント，(t_A, x_A) と (t_B, x_B) 間の距離（計量）を書けば

$$ds^2 = -c^2(t_A - t_B)^2 + (x_A - x_B)^2. \quad (1)$$

となる．第一項にマイナスが付いているところがユークリッド空間におけるピタゴラスの定理と違うところである．光速より速く情報が伝わらないことから，

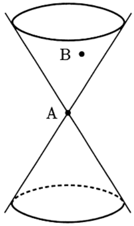


図5　2つのイベントAとBが因果関係にあるためには，互いに他の光円錐内にある必要がある．

$$ds^2 < 0 \tag{2}$$

が，2つのイベントAとBが因果関係にあるための条件になる．このことを図5に示そう．$ds^2 = 0$ は光の伝搬の世界線の集まりを表す．図で円錐上なので光円錐と呼ぶ．相対性理論では時空の2点が互いに他の光円錐内にあれば因果的に関係し得る．

一般相対性理論で計量は，2つのイベントの座標の差を dx^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ とすれば,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3}$$

と書ける．

一般相対性理論では，計量 $g_{\mu\nu}$ の固有値の一つが負で他が正である場合に，負の固有値の方向を時間的であると言う．因果関係はその方向にある．このことを言い換えると，計量 $\hat{g}_{\mu\nu}$ を持つ4次元リーマン多様体に大域的に定義されたベクトル場 v_μ（規格化してあるとする）が存在すれば,

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} - 2v_\mu v_\nu$$

を因果関係のある計量としてよい．時空のトポロジーによっては，そのようなベクトル場が存在しない[4]．例えば，2次元球面に大域的なベクトル場が存在しないので，時間方向を導入しようがない．

そのようなベクトル場は，量子重力のような微視的な世界では存在しないかもしれない．素粒子理論の人たちが，ローレンツ計量ではなく，リーマン計量をしばしば用いて有用な結果を得ているのはそのせいかもしれない．時間軸は，いわば量子力学の結果として，後で出てくるべきものかもしれない．

アインシュタインの一般相対性理論では時空自体も，物質分布に依存して力学的に決定される．古典重力理論ではアインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

に従う $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$．ここに，左辺はアインシュタインテンソルと呼ばれる時空の幾何学量で，基本的な力学量である計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその微分で書くことができる．右辺の $T_{\mu\nu}$ は，物質が作るエネルギーと運動量の分布である．G はニュートンの万有引力定数で c は光速である．この方程式は，物質分布が与えられると時空が決まるとも読める．しかし，もう少し詳しく見ると，このうち $\mu = 0, \nu = 0, 1, 2, 3$ は初期値に対する拘束条件とみなせる．これは物質と時空の幾何学が，同時に関連していることを意味しているので，物質分布が原因で時空の構造が結果というのは正確でないだろう．

このことは，量子化すると，量子状態 Ψ に対する条件になるので，問題がより先鋭化する．

$$\left[G_{0\nu} - \frac{8\pi G}{c^2} T_{0\nu}\right] \Psi = 0, \ (\nu = 0, 1, 2, 3).$$

すなわち，この拘束条件は重力場と物質の量子状態に対する条件と言うこともできる．

4. 量子重力理論に向けて

前節で述べたように，一般相対性原理は物理法則が座標変換に対して不変であることを要求する．従って，物理的な観測量は座標変換に対して不変でなければならない．このことから，座標に物理的な意味がないことになるので，時空を観測することの意味づけが，容易ならざるものであることが示唆される．例えば，星の質量を相対性理論で，定義すると星を取り巻くすべてのものをひっくるめて遠方から見たエネルギーとして定義せざるを得ない．すなわち，局所的に定義できないのであ

る*6)．すなわち，一般相対論的な観測量は局所的なものではなく，宇宙全体に対して定義される大局的なものしかない．この観点からすると，いわゆるループ量子重力は観測量を時空におけるある閉曲線（ループ）に沿って接続場を積分したものを物理量としているが，これも非局所的なものである．

一方，量子力学において観測は局所的な観測器の存在を前提としている．量子重力理論の本質的な難しさがここにある，と思う．例えば，ループ重力に現れるウィルソンのループ演算子は，量子情報理論では問題がある[5]．量子重力理論がアインシュタインの古典重力理論をそのまま量子化する必然性はないし，超弦理論が摂動論的にS行列を有限に計算できるなどで優れているが，観測の段階に立ち至れば，上記の問題はそのまま残っている．

5. むすび（文系の人に）

イマヌエル・カントは時間と空間の概念が先験的（アプリオリ）に人間悟性に備わっているものだとし，何か別物で根拠づけられるものではない，と述べている．確かに，物事の起こる順番があるという意味での時間の概念は先験的としか言いようがなく，ものには配置があるという意味で空間についても同様であろう．例えば，宇宙が有限個の点の集合であるとしても，空間に関する先験性には抵触しない．

従って，時空が多様体であるという古典相対性理論の前提は先験的なものとは言えず，あくまで仮説に過ぎなく，多分巨視的な対象にしか適用できない近似でしかないだろう．よく，相対性理論は時空を幾何学化したと言われるが，その効用にも限界があるように思う．相対性理論は，時空の存在を前提としているだけではなく，その力学・物理学なので，時空の測定（認識）まで問題にする必要がある，と思う．古典論の段階では，この測定問題は物差しを並べるなどの機械的なものであり深く論じても，特に得るものがあったわけではない．アインシュタインの特殊相対性理論の構築では時計を合わせるところに出てきたわけであるが，その後の教科書の書き方がそれとは違った書き方をしていることからも分かるように，必要不可欠というわけではない．

量子重力までいくとそうは行かなくなり，観測量が大域的であるのに観測は局所的であるという問題を解くには量子情報理論が必要になるというのが筆者の信念である．その際にヒントとなるのが，アインシュタインの 1905 年の原論文であると思う．

*6) ホーキング等により，いろいろな局所質量が提案されているが，いずれも質点を閉曲面で囲んで，面積積分として定義されるもので，真の意味で局所的ではない．

参考文献

1) アルベルト・アインシュタイン著，『相対性理論』，内山龍雄訳・解説（岩波文庫）．
2) 例えば，松下泰雄，“ミンコフスキー空間” 数理科学・特集「空間概念と物理学」11 ページ．
3) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
4) R.P. Geroch, *J. Math. Phys.* **8**, 1117 (1985).
5) D. Beckman et al, *Phys. Rev.* **D65**, 065022 (2002). quant-ph/0104027, (2001).

（ほそや・あきお，東京工業大学大学院理工学研究科）

幾何学における空間とは



前田 吉昭

1. ユークリッド空間と微積分

幾何学における「空間」を第一にあげるとすれば，それはユークリッド空間であろう．(n 次元) ユークリッド空間は，ご存知の通り，n 次元実ベクトル空間

$$\boldsymbol{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \,|\, x_1, \cdots, x_n \in \boldsymbol{R}\}$$

に，任意の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，その距離を

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

によって与えたものである．特に，n=2,3 のときは，おなじみな平面および空間であり，これが幾何学の原点とも言える空間である．

ユークリッド空間は，少なくとも古典的には，人間が住んでいる実感が持てる「空間」であり，その上で，様々な図形の性質を調べることが幾何学の発展をもたらしただけでなく，実際の世の中にも役立つモデルであったと言える．

ユークリッド空間の特徴は，「点」というものがはっきり意識されること，それぞれの点の位置関係が「点」の位置と距離を使ってはっきりと示されることにある．それにより，図形の形をきちんと記述する（例えば 3 角形の辺の長さ，内角等）ことができた．今では，この距離を空間に入れる「位相」の代表的なものとして考えられたことも重要なことであろう．

さらに大切に思えることは，「微積分」が有効な手段として使えることである．これが微分幾何学を発展させる大きな手法となるからである．第一には，質点の運動の記述である．ユークリッド空間の中の質点の運動は，時刻ごとの動きとして，質点の位置を観測し，それを記述することで，曲線が得られる．この曲線の性質を「微積分」を用いて調べることで，質点がどのような運動法則によって記述されるかがよりよく分かることになる．

3 次元ユークリッド空間の曲線は，それが質点の運動から得られたものとすれば，その運動を時刻 $t = a$ から $t = b$ まで観測すると，区間 I=$[a, b]$ に対して，$\boldsymbol{x}(t) : I \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ の写像として考えることができる．微積分を使うために，この写像は都合がよいまで微分可能（t について）としよう．まず，この写像の微分 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ を考えると，それは，曲線の接ベクトル（無限小にどの方向に進むか）が分かる．さらに，2 回微分 $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ を考えることで，その曲線の加速度が分かる．ニュートン力学によれば，曲線の各点での加速度ベクトルが力に比例することになるので，本質的に加速度ベクトルにより曲線が分かることになる．これを幾何学的に見るとすると，弧長パラメータを用いた曲線表示をするほうが説明しやすい．$t = a$ から一般の時刻 t までの曲線の長さを s とする．これは，

$$s = \int_a^t |\boldsymbol{x}(\tau)| d\tau$$

によって与えられる．この弧長 s を時刻パラメー

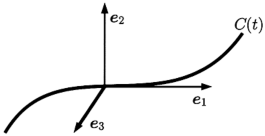


図 1　$\boldsymbol{R}^3$ の曲線.

タ t に変えて曲線を表すことにする．このパラメータによる特徴は，このパラメータ s に関する速度ベクトル $\boldsymbol{x}'(s)$ は $|\boldsymbol{x}'|=1$ を満たすことである．このパラメータ表示による曲線について，フレネ標構と呼ばれる曲線に沿ったベクトル場の組

$$\{\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)\}$$

を次のようにとる．まず，$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{x}'$ とおく．次に，$\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{x}''(s)$ の方向で長さが 1 となるベクトルとする．このとき，すぐに分かるように，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は直交する．最後に，$\boldsymbol{e}_3$ を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が右手系となるように選ぶ（図 1）．このようにフレネ標構を選ぶことにより，曲線に対する次のフレネ・セレの公式が得られる[1]．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1'(s) &= \kappa \boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{e}_2'(s) &= -\kappa \boldsymbol{e}_1 + \tau \boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{e}_3'(s) &= -\tau \boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}$$

ここで，κ と τ は s の関数で，それぞれ曲線の曲率，捩じれ率と呼ばれるものである．このように，微積分を用いることで与えられた曲線に対して，その曲線の速度，加速度，その長さや曲がり具合や捩じれ具合といった幾何学的概念を作ることができる．さらに，この微分方程式の解の存在と一意性により，曲率と捩じれ率といった幾何学的不変量を与えることが，平行移動と回転移動を除いて曲線を一意的に決定できることが分かる．このように，ユークリッド空間では，「点」の認識と距離による相互関係，そして微積分の手法により空間での様々な幾何学的性質を記述し，それを解析することができるようになっている．

2. 曲面論

3 次元以上の空間において，「曲面」の性質を調べるために，多変数の微積分（偏微分，重積分）が有効である．2 次元曲面について少し述べてみよう．空間としては，3 次元ユークリッド空間を考える．例えば，球面のような文字通り曲がった「曲面」を頭に浮かべてみることにする．曲面を大域的に制御して扱うことはなかなか不可能であることが分かる．例えば，世界地図である．球面として世界地図を描くことはできるのだが，それを展開図として一枚の紙に書くことが難しいのを思い出していただこう．アイデアは，それでもまず，一枚の紙を使って曲面の一部を描くことである．曲線が一つのパラメータを使って表示したように，曲面では 2 つのパラメータを使って表示する．実際，U を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合として，写像 $\boldsymbol{x}: U \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を考える．これを，具体的に

$$\boldsymbol{x}(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$$

と表示する．微積分を活躍させたいために，$x_i(u,v)$ $(i = 1,2,3)$ は u, v について 2 変数関数として微分可能とする．このとき，$\partial_u \boldsymbol{x}$ と $\partial_v \boldsymbol{x}$ は曲面の上の各点においてそれぞれ接している．曲面が構成されるために，この 2 つのベクトルは各点において一次独立であると仮定することは自然であろう．こうすることで，曲面の各点 p での接空間（$\partial_u \boldsymbol{x}$ と $\partial_v \boldsymbol{x}$ によって張られる平面）が分かり，その接平面に垂直な方向（法ベクトル）が取れる．特に，法ベクトル N を

$$\partial_u \boldsymbol{x} \times \partial_v \boldsymbol{x}$$

の方向で長さが 1 となるものをとる．こうすることで，曲面の各点 p の十分小さな部分（無限小）では，接平面を平坦な基準として，グラフとして見ることができるから，接平面からどの程度離れていくかということで，曲面の形状が理解できる（図 2）．このことから，曲面の曲がり具合（曲率）が実際定義できることになる[1]．この曲面の一部をパッチワークのように貼り合わせて全体の曲面

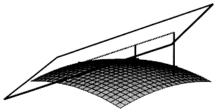


図 2　$\boldsymbol{R}^3$ の曲面.

を描きたい．それには，2 つの曲面のパラメータ表示

$$\boldsymbol{x}(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)),$$
$$\boldsymbol{x}(u',v') = (x_1(u',v'), x_2(u',v'), x_3(u,v))$$

が共通な曲面部分を描いているときに，(u,v) と (u',v') がそれぞれ関係し合っているはずで，

$$u' = u'(u,v), \quad v' = v'(u,v)$$

は，局所的に微分同相写像になっている．

3. 多様体

この曲面の概念を拡張して得られる空間が「多様体」と呼ばれるものである．現在の幾何学は，多様体の上に構成されている．基本となるのは，局所的には，曲面のように実在するもの（と考えるもの）を表現するパラメータ空間を設定して，それを貼り合せて大域的な「空間」を作りあげるものである．実際，以下のように行う．まず，M を位相空間とする（聞きなれている人ならば，連結，ハウスドルフ空間といった基本的な位相空間の性質を仮定するが，専門家でない人は，ごく常識的な数学の仮定をしてあると考えておく）．位相空間というのは，ユークリッド空間が手本となるように「点」の概念と「点」の関係が「位相」という言葉で与えられているものである．この位相空間 M を曲面で行ったような局所的な構造とその貼り合せにより再構成する．まず，M を開集合の族 $\{U_\alpha\}$ によって被覆する．この各 U_α に対して，次の座標系を以下のような位相同相写像

(1) $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \tilde{U}_\alpha$

によって与える．ここで，$\tilde{U}_\alpha$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合

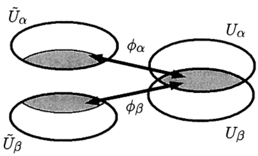


図 3　多様体.

である．各，U_α に対して，このような作業を行い，$\{U_\alpha, \tilde{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ のデータを作る．このとき，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ であるとき，

(2) $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$

が微分可能（これは都合よく何度でも微分できることを意味している）であるとき，M を微分可能多様体と呼ぶ（図 3)．(2) の条件は，座標変換を意味している．前に与えた 3 次元空間の曲面が多様体の最も基本となる例であり，その拡張であることが理解できると思う．曲面の場合は，ユークリッド空間の中に実現されていなければならないが，多様体というのは，あくまでも実態として点集合 M があり，それをあたかも，曲面のようにパラメータ表示を行い，それをパッチワークのように貼り合わせてできたものと考えているが，かなり抽象的な空間と言うことができる．微分可能多様体 M では，ユークリッド空間や曲面で行ったような幾何学的対象を微積分を合わせて作ることができる．例えば，多様体 M 上の曲線というのは，ある区間 I を与え，写像

$$c : I \longrightarrow M$$

を考えることである．この曲線は，M の座標系 $\{U_\alpha, \tilde{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ を使ってみれば，$c_\alpha = \phi_\alpha \circ c$ を考えて見れば，U_α の上では，

$$c_\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$$

と表される n 次元ユークリッド空間の曲線と見れる．このようにすると，この曲線が，微分可能であるという概念が入れられる．この微分可能という概念が多様体 M の上で意味を持つようにする

ために，座標変換が微分可能としておくことが必要である．さらには，多様体の間の写像，それが微分可能な写像であるといった概念も構成できる．

微分ができることにより，接ベクトルを定義することができる（曲線の接ベクトル）．これにより，接空間の概念が定まり，ベクトル空間の議論から，その双対空間が考えられ，双対形式やテンソル形式といった幾何学的対象物が得られてくる．

多様体（曲面であっても）の上の幾何学的な対象物として大切なものは「場」と言われるものである．これは，多様体の点に上で挙げたような幾何学的対象物を付随させたものである．例えばベクトル場は，多様体 M の各点 p に対して接ベクトル $X(p)$ を対応させることである．多様体の良いところは，これを座標系によって表示させることで，ユークリッド空間の（開集合の）ベクトル場として見なすことができることである．このようにすることで，ベクトル場が点 p について微分可能であるという概念ができる．こうすることで，多様体の上でベクトル解析を行い，例えばもう一度微分をするといった操作から新しいベクトル場を得るというようなことができるようになる．このようにして，微分形式，テンソル場といった様々な幾何学的対象物を構成することが（微分可能といった枠の中で）できるようになる．これらにより「空間」の性質を調べていくことができるようになる．

要するに，多様体の上の幾何学的対象物は，（多様体自身もそうであるが），まず局所的なユークリッド空間（の開集合）の上で構成されたものを基本とし，それを貼り合わせ（座標変換）によって，多様体の上に大域的な対象物として考えられるように設定したものということになる．ここで，基本となるのは，あくまでも「点」描像が主役となる．

4. バンドル構造

多様体の幾何学的対象物を説明するのに，バンドル（束）という概念を導入する．これも，多様体と同じように，局所的に構成したものを貼り合わせるという形で実現する．いま，P と M を微分可能多様体とし，これに微分可能な全射写像

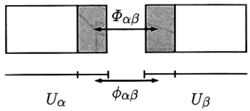


図 4　バンドル．

$$\pi : P \longrightarrow M$$

があるとする．さらに，M の各点 p に対して，π の逆像 $\pi^{-1}(p)$ は，P の部分多様体となっていて，それらはいつも一定の多様体 F と微分同型であるとする（2 つの多様体が微分同型であるというのは，その 2 つの多様体に微分同型写像があるときを言う）．F を標準ファイバーと言う（図 4）．これを貼り合わせの立場から見てみると，次のように表される．まず，多様体 M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ をとり，多様体を定義したときの座標系となる性質 (1), (2) をもっているとしよう．次に，各座標系 $\{U_\alpha, \tilde{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ を使って，次のような自明なバンドル構造を作る．

$$\pi_\alpha : \tilde{P}_\alpha = \tilde{U}_\alpha \times F \longrightarrow \tilde{U}_\alpha.$$

こうすることにより，$\{\pi_\alpha, \tilde{P}_\alpha, \tilde{U}_\alpha\}$ のデータができる．これを，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ となるところで微分可能写像

$$\Phi_{\alpha\beta} : \tilde{P}_\beta \longrightarrow \tilde{P}_\alpha$$

が次の図式が可換となるようにすることで「貼り合わせ」を行う．

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}_\beta & \xrightarrow{\Phi_{\alpha\beta}} & \tilde{P}_\alpha \\ {\scriptstyle \pi_\beta}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \pi_\alpha} \\ \tilde{U}_\beta & \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} & \tilde{U}_\alpha \end{array}$$

こうすることで，様々な幾何学的対象物はバンドルという言葉で述べることができるようになる．さらに，「貼り合わせ」というのは，2 つの貼り合

わせだけでなく，次の意味での整合性を要求している．3つの座標系 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \phi$ に対して，

$$\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma}\Phi_{\gamma\alpha} = I$$

となることである．この整合性により，多様体の上の幾何学的対象物を大域的に見ることができる．

このことは，多様体の貼り付けについても同じことが言えるが，多様体の貼り付け写像は，$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ の形をしているために，自然に整合性が出てくる仕掛けになっている．典型的なものとして，接バンドルを考えることができる．n 次元多様体 M の接バンドル TM は，多様体 M の各点 p の接ベクトル全体（接空間）を考え，それを T_pM とおく．この和集合を $TM = \cup_{p\in M} T_pM$ とする．これに全射

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

を自然に与えれば，これは，標準ファイバーとして n 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$（ここでは，ユークリッド計量は特に考えない）をもつバンドルとなる．バンドルには，切断という概念を入れることができる．特に，写像 $s : M \longrightarrow TM$ が TM の切断（大域的な）とは，$\pi \circ s = id.$ を満たすものを言う．これは，多様体の大域的なベクトル場を与えたことに他ならない．もちろんこれを局所的に（開集合の上で）考えることもできる．このようにすると，幾何学的対象物であるベクトル場といったものもバンドル（これも多様体なので）の「点」を基本にした概念と理解できる．微分形式やテンソル場といったものも，このバンドル構造で記述できるものである．また，ゲージ理論といった数理物理で登場する物理的描像もこのバンドルにより記述されることになる[3]．結論から言うと，幾何学の空間は「点」というものをどのように考えるかの問題となっている．「点」を記述するのに，局所的には，ユークリッド空間の「点」描像を用い，それを座標変換によって貼り合わせるというものである．

5. 非可換微分幾何学

今まで述べたように，従来の幾何学の設定では，空間は，「点」の概念を基礎におき，その「点」の関係を「位相」により束縛させてきたものと言える．何度も述べたように，この設定は，古典力学の質点の運動を典型的なものとして，古典描像を記述するためのものと言える．

一方，量子論が世の中で信じられるようになれば，量子論に相当する幾何学がどのように構築されるかというのは，ごく自然な問題であろう．現在のところ，この問題に対する答があるわけではないが，ひとつ有望と思われる考え方は非可換幾何学である．これを簡単に説明してみよう．空間を認識するのは，今まで述べたように，「点」概念（実際に点集合）として理解するわけだが，これを「観測量」によって理解しようというのが，非可換幾何学の基本的な考え方である．実際，多様体 M の上の関数全体の集合 $C(M)$ を考える．これには，2つの代数的演算が定まる．

1) 和　$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
2) 積　$(fg)(x) = f(x)g(x)$.

演算 1) と $C(M)$ の元のスカラー倍を同じように自然に定義することで，$C(M)$ は，ベクトル空間の性質を持っている．さらに，演算 2) により，$C(M)$ は環（代数）の構造を持つことになる[2]．このようにして，多様体上の関数の全体を考えると，代数が構成される．多様体の関数というのは，空間の「点」を与えるとその「点」での値を決めることになる．これは，その点での何かの量を観測することになり（例えばその点での温度の観測といったことである），$C(M)$ は，多様体の観測量の全体（様々な観測を行ったと考える）である．大事なことは，多様体の上での観測量の全体である環 $C(M)$ は可換である．ここで，もう少し性質のよい関数を考える．例えば，$C^0(M)$ を多様体 M 上の連続関数全体，$C^\infty(M)$ を多様体 M 上の微分可能（無限回）関数とする．実は，これらの関数環が，多様体の位相構造や微分構造を決めること

が知られている．その理由により，多様体 M を考える際に，これらの関数環を考えることが十分であることが言える．実際には，この構成法をきちんと与えてあげる必要があるが，関数環と「点」との対応は，例えば，$C^0(M)$ の場合，点 p に対して，$I_p=\{f\in C^0(M); f(p)=0\}$ を考え，これを代数的に（極大イデアル）特徴づけることで分かる．

このように，多様体 M の代わりに，関数環を考えることで，「空間」の意識をいったん捨てて，観測量によって「空間」の構造を理解することは，必然的に，観測量の全体と思われる環構造を非可換な構造をもつものに変えたときにどのようなことが起こるかが興味ある問題となる．これが，非可換幾何学の出発点と言える．観測量の全体の代数構造が非可換となれば，元の「空間」は今までの多様体の概念を当然乗り越える必要があろう．問題は，従来の幾何学と同様に，非可換環が与える「空間」をどのように設定できるかが大きな問題である．これについては，まだ試行の段階と言えるが，幾何学の「空間」の概念を大きく乗り超えるための挑戦であろう．

ここでは，ひとつ例を与えてみる．2次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ の微分可能関数の全体からなる関数環 $C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ を考える．これには，先ほど述べた積（演算2)）によって可換な代数構造が入るが，ここで次のような積を考えてみる．ν を（実，複素）パラメータとし，関数 $f(x,y), g(x,y)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&(f*g)(x,y)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\nu}{2}\right)^k\sum_{i+j=k}\frac{\partial^i}{\partial_x^i}\frac{\partial^j}{\partial_y^j f}\frac{\partial^j}{\partial_x^j}\frac{\partial^i}{\partial_y^i g}
\end{aligned}
$$

とおく．上の式は，無限和になっているので，この積を正当化するためには，考える関数を形式的べき級数に広げないといけない．つまり，$C^\infty(\boldsymbol{R}^2)[[\nu]]$ を，ν についての $C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ を係数とする形式べき級数全体とする．上の積はこの集合の上に定義されていて，$(C^\infty(\boldsymbol{R}^2[[\nu]],*)$ は，結合律を持つ環となる．これは，モイヤル積と呼ばれるもので，量子力学の中にしばしば登場する積である．この積は，非可換であり，$(C^\infty(\boldsymbol{R}^2[[\nu]],*)$ は非可換環となる．ここで，パラメータ ν を形式的に0に持っていくと，その積 $*$ は，通常の可換積となる．そこで，この積 $*$ は通常の可換積からの変形と見ることができ，環 $(C^\infty(\boldsymbol{R}^2[[\nu]],*))$ は，もとの可換関数環 $C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ の代数的にみた変形環と考えることができる．この環に対応する「空間」は当然もとの2次元ユークリッドではなく，（非可換に）変形された空間として考えられ得る対象となるだろう．現在，このような手続きで，通常の空間（多様体）の可換積を変形することで非可換な環を構成し，あたかも「空間」描像をつけた幾何学が始まってきている．しかしながら，「非可換多様体」というものを完全に掌握するためにはまだ時間が必要だろう[3)]．

6. より広い幾何学的空間

古典的な記述においては，幾何学は「点」を意識し，それを基盤に考えていけばよかったが，先ほど述べたような，例えば量子的な現象，それを記述するための幾何学としての空間は，多分に「点」という概念が失われてくるように思える．そのような幾何学を今後は準備していく必要があるというのがここでの主張である．しかしながら，このような考え方がどこまで世の中に受け入れられるかどうかは未知であろう．しかしながら，このような試行がいろいろ行われるべきであろう．

実際，ジャーブという少し奇妙に見える幾何学的対象物も生まれている．これは，前に述べたバンドルに似たものであるが，局所的には自明なバンドル構造をしているが貼り付け写像に整合性を持っていないものである．特に，考えられているものは，多様体 M の $\boldsymbol{C}$ をファイバーとするバンドルジャーブというものが典型である．多様体の開被覆 $M=\cup_\alpha U_\alpha$ をとり，各 U_α の上に自明な $\boldsymbol{C}$ バンドルを考える．$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ のところで，その貼り合わせ写像 $\Phi_{\alpha\beta}$ が

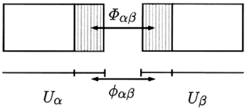


図5　ジャーブ；$\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma}\Phi_{\gamma\alpha} \neq I$.

$$\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma}\Phi_{\gamma\alpha} \neq I$$

と整合性を破るものである（図5）．貼り合わせ写像の整合性は，コサイクルとして表されているので，バンドル構造は，2番目のコホモロジーで決定されるが，ジャーブは3番目のコホモロジー，特に，Dixmier–Douady クラスと言われるもので分類される．このような，ジャーブのようなものになると，「点」を同一視してそれを絶対的にみる見方が大分揺らいできているようにも見える．

ここで次のような例を考えてみよう．まず，2種類の複素パラメータの微分方程式を考える．

$$\begin{aligned} &\textbf{(a)} \quad \frac{dy}{dt} = y^2, \\ &\textbf{(b)} \quad \frac{dy}{dt} = y^2, \quad \frac{dz}{dt} = -y. \end{aligned} \tag{1}$$

この微分方程式 (a) と (b) の解の集合をそれぞれ $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とおく．微分方程式 (b) の最初の方程式は，(a) と同じなので，$\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への自然な射影として $(y(t), z(t)) \mapsto y(t)$ を考えることができる．これを $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ とおく．集合 $\mathcal{A}$ を考えてみると，この微分方程式は変数分離法で解けて，解を書くことができ，それは，$y_1(t) = \frac{1}{c-t}$，ここで c は常数（複素数），として与えられる．ところがこの解を別の複素数を常数として，$y_2(t) = \frac{a}{1-at}$ と書くこともできる．この2つの解は，a, c がともに0でなければ，$a = \frac{1}{c}$ の関係で移り合うので，$\mathcal{A}$ は，球面（1次元複素射影空間）と見てもよい．ところが，微分方程式 (b) の解は，微分方程式 (a) の解として $y_1(t) = \frac{a}{1-at}$ をとれば，これに応じて，$z(t) = z_0 + \log(1-at)$ が解として得られる．ここで，z_0 は複素数の常数である．ここで，問題なのは，$\log(1-at)$ が無限分岐をしていることである．このために，分岐のとり方の自由度が起きる．一方，微分方程式 (a) の解を $y_2(t) = \frac{1}{c-t}$ としてとれば，$z(t) = z_0 + \log(t-c)$ が解となる．ここでも $\log(t-c)$ が無限分岐をしている問題は起こる．微分方程式 (b) の解を貼り付けようとすると，微分方程式 (a) の場合とは別に，分岐の自由度があるために貼り付け写像が多価にならざるを得ない．このことで，$\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ は球面上のバンドル構造とはならないことを示すことができる．このような例が不思議なものなのかどうかはまだ分かってはいない．紙面の関係で，この例がどのようにして出てきたか説明することができなかったが，じつは，前に述べた非可換幾何学を扱うための可換環の変形の問題から出てきている．その意味では，この微分方程式の解空間の問題は，新しい幾何学的な「空間」を考えるよい例とも言えるのではと思っている．

参考文献

1) 小林昭七『曲線と曲面の微分幾何』，基礎数学選書 17，朝倉書店．
2) 前田吉昭『多様体入門』，数学レクチャーノート基礎編 5，培風館．
3) 大森英樹，前田吉昭『量子的な微分・積分』，量子数理シリーズ 1，シュプリンガー・フェアラーク東京．

（まえだ・よしあき，慶應義塾大学理工学部）

解析学から見た「空間」

河 東　泰 之

1. 空間とその非可換化

解析学において「空間」と言えばまず関数空間のことであろう．測度空間の上の L^p–関数たちのなす空間などが最も典型的なものである．これらはベクトル空間であり，興味があるのは通常無限次元の場合である．そのようなベクトル空間の上での無限次元の線形代数にあたるものが関数解析学であり，解析学における主要な技法の一つである．しかし，本稿ではそのようなベクトル空間ではなく，多様体などの空間，およびその「非可換化」について考える．

n 次元のユークリッド空間が非常に基本的な空間であることは言うまでもないが，それ自体については解明すべきことがたくさんあるというわけではない．そこで考える範囲を広げたいのだが，一つの方向は，どこまでもまっすぐ伸びていて何倍でもできるという性質を保ったまま，無限次元にすることで，これが上で述べた関数解析学の方向である．それに対し，まっすぐ伸びているということをやめて曲面のようなものを考えるという方向がある．このようなものが多様体，さらにはもっと一般の「空間」である．（無限次元にしてかつ曲がったものを考えることもできるが，ここではより基本的な場合に限定して考えている．）しかしそのような「空間」は通常幾何学の対象である．なぜ「解析学から見た空間」という題目でこのような話になるのであろうか．それにはやはり関数空間が現れてくる．

漠然と「空間」と言っているのはある構造を備えた集合のことであり，構造の選び方によって，位相空間，測度空間，可微分多様体，複素多様体などいろいろなものが考えられる．それに応じてその空間の上で，実数や複素数に値をとる自然な関数たちの集合を考えることができる．通常この集合は和やスカラー倍を取る操作について閉じているのでこれによってベクトル空間ができる．（n 個の点からなる有限集合を考え，何の構造も考えなければこの集合の上の実数値関数全体の集合は $\mathbb{R}^n$ と同一視できるのでユークリッド空間自体もこのようにして生じるとも考えられる．）またこの関数空間が積について閉じていることもよくあり，その場合関数のなす可換環が得られる．（正則・可測・連続関数の積はそれぞれ正則・可測・連続であるといったことである．）この可換環がもとの集合と構造を「覚えている」ということがよくある．例えば，コンパクトハウスドルフ空間 X に対しその上の複素数値連続関数全体を考えるとそれは可換環になるが，この環の極大イデアル全体のなす空間にある自然な位相を入れればもとの X を復元することができる．したがって，コンパクトハウスドルフ空間を考えることと，その上の複素数値連続関数環を考えることは同じ情報を持っていることになる．そこでこのようにある種の構造を持った空間とその上の自然な関数のなす可換環が同じ情報，あるいはほぼ同じ情報を持ってい

るということから出発して，可換環の代わりに非可換の環を考えれば，空間概念の一般化ができるのではないか，ということが考えられる．これが「非可換空間」の考え方である．以下，私の専門である作用素環論における非可換空間の考え方について説明していこう．これは昔からある考え方だが，近年コンヌの提唱する枠組みによって，理論物理学とも関係して多くの注目を集めているものである．

ここでは空間の上の関数たちの積演算を非可換にしたようなものを考えているのであって，そのことを「非可換な空間」とか「非可換な幾何学」というのは言葉が省略されているのだが数学においてはよくある用語法である．なお，空間を考えることとその上のしかるべき関数のなす可換環を考えることが同じだ，というのは代数幾何学においても非常に重要な考え方である．そこで代数幾何学における可換環の代わりに非可換環を考えるのが非可換代数幾何学であり，近年様々な試みがあるが，これについてはここではふれない．

また，量子力学では観測可能な物理量が（自己共役）作用素で表され，その積演算が可換ではないということが古典力学との大きな違いであった．このことから，可換環から非可換環への移行のことを量子化と呼ぶことも多い．

2. 非可換測度空間

まず作用素環論における非可換空間の扱いとして，非可換測度空間を取り上げよう．これは，コンヌによる非可換幾何学の提唱よりずっと前からあり，非可換積分論・非可換測度論と呼ばれていたものだが，作用素環論自体の立場からも，またより現代的な非可換幾何学の研究の立場からも重要なものである．

測度空間 (X,μ) 上の L^∞–関数たちは可換環をなす．これらは Hilbert 空間 $L^2(X,\mu)$ の上に掛け算で作用する作用素と同一視することができ，そうすると，共役演算（今の場合，複素共役をとる操作）と，しかるべき位相で閉じた作用素環（フォンノイマン環と呼ばれる）になる．そこで，一般の非可換なフォンノイマン環を，L^∞–関数の非可換化と思い，「非可換な測度空間」を表しているものと思うのである．どのような多様体でも L^∞–関数環を考えればみな同型になってしまってもとの多様体の情報は失われてしまうが，フォンノイマン環については互いに同型でないものがとてもたくさんあり，「非可換測度空間」のバラエティの豊富さを表している．可換な場合に戻って簡単のため，通常の測度空間 (X,μ) で，$\mu(X)$ が有限である場合を考えよう．この場合，L^∞–関数はもちろんすべて可積分になる．そこで，$f\in L^\infty(X,\mu)$ に対し，$\int_X f(x)\,d\mu$ を対応させる汎関数を ϕ とおこう．もちろん $\phi(fg)=\phi(gf)$ であるが，実は一般の作用素環であってもその上のしかるべき汎関数 ϕ であって $\phi(xy)=\phi(yx)$ となるものがあれば，たとえ $xy=yx$ でなくても通常の積分論のかなりの部分が展開できる．このような汎関数は線形代数における行列のトレースの一般化なので，これもトレースと言う．トレースを持つ（無限次元単純）フォンノイマン環を II_1 型因子環と言う．このような作用素環の上で非可換積分論を研究することが，作用素環論においてもっとも古くからある手法である．$\mu(X)=\infty$ にあたる非可換環の場合の処理はそれほど難しくないので，次に考えるのは $\phi(xy)=\phi(yx)$ となるようなしかるべき汎関数が作用素環上に存在しない場合である．このような場合は非可換性の度合いがさらに強いと考えられ，フォンノイマンの時代から存在は知られていたがその考察は長い間極めて困難であった．これを取り扱えるようにしたのが冨田–竹崎理論である．冨田–竹崎理論の基本定理によれば，そのような場合にはフォンノイマン環上に自明でない一径数自己同型群が発生する．この一径数自己同型群は一意的には決まらないが，コンヌのラドン・ニコディム型定理によって「ほぼ一意的」であることがわかる．これはフォンノイマン環を非可換な測度空間と思うと，この「空間」の上に自然なフローが自動的に発生するということである．あるいは量子力学の考え方から（自己共役）作用素は

観測可能物理量を表していると考えられるのでこの一径数自己同型群は物理系の時間発展の類似とも考えられる．いずれにせよ，作用素環が可換な場合や，$\phi(xy) = \phi(yx)$ となるしかるべき汎関数 ϕ がある場合，すなわち「可換に近い」場合にはこの一径数自己同型群は自明なものになってしまうので，これは非可換な場合になって初めて現れる構造なのである．これによって可換から非可換への移行は単なる形式的一般化ではなく，真に新しい構造が現れているのである．これを使って作用素環の構造解析を行うのが 1970 年代に劇的に発展したコンヌの理論である．この一径数自己同型群は統計力学における KMS 条件や，場の量子論における時空対称性とも密接に関係しており，非可換空間の重要な性質を担っている．コンヌによる最近の非可換幾何学はもっと様々な構造を用いるが，最新の整数論への非可換幾何学的アプローチでもこの一径数自己同型群が重要な役割を果たしている．

コンヌの分類理論においては測度空間の理論，特に測度空間上の力学系を扱うエルゴード理論の様々な非可換化が重要な役割を果たしている．例えばエルゴード理論で古くからある基本的な命題にロホリンの補題というものがあるが，これの非可換版はコンヌの一連の仕事で決定的な果たしており，現在もこれの様々なバリエーションが研究されている．（なお 4 次元トポロジーで有名なロホリンの定理と言うものがあり，私はずっと両者は無関係だと思っていたが，同一人物であることを比較的最近に知った．）またエルゴード理論においては軌道同型という重要な概念があるが，これについても通常のエルゴード理論の場合とフォンノイマン環の場合とで，様々な平行した結果が成り立つことが知られている．これについては，可換な場合が先にあってそれを非可換化したというよりはむしろ，非可換な理論が先行して研究され，それをもとに可換な場合についてもよくわかっていったものである．

1980 年代に結び目や統計力学との関連で新たなページを開いたジョーンズの理論は様々な見方を許し，代数的には非可換環上のガロア理論と思うのがもっとも単純な見方だが，非可換測度空間の立場からも次のように考えられる．ジョーンズ理論ではフォンノイマン環とその部分環を考えるのだが，非可換測度空間の考えでは，部分環に対応するものは部分空間ではなく，同じ空間の上での部分加法族である．すなわち，集合 X 上の加法族 $\mathcal{B}$ と測度 μ に対し，$\mathcal{B}$ の部分加法族 $\mathcal{B}'$ と μ のそこへの制限を考える．すると，

$$L^\infty(X, \mathcal{B}', \mu) \subset L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$$

となるが，フォンノイマン環とその部分環をこの組の一般化と思うのである．つまり部分環は「可測集合が少ない」ということに対応する．$L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ の元は一般に $\mathcal{B}'$ については可測ではないので，$\mathcal{B}'$ について可測なものにするには「値をならす」必要がある．これが確率論における条件付期待値である．これの非可換測度空間版がフォンノイマン環とその部分環に対して考えられ，ジョーンズ理論で大きな役割を果たすのである．これによって，非可換測度空間上のガロア群の量子化のような理論が実現できる．（ガロア群はもともと一般に非可換な群なので，「ガロア群の非可換化」と言ってしまうと意味が通らないであろう．）

上で確率論の言葉が出てきたが確率論は測度論の枠組みで展開されるので，非可換測度空間に対する非可換確率論も展開できる．この考え方も古くからあり，上述のエルゴード理論との関係もその一つだが，確率論との類似を考える際に基本的な概念は確率変数の独立性である．これをフォンノイマン環のテンソル積を使って「非可換化」することが昔から考えられてきたが，最近ヴォイクレスクによって，新たな非可換化が進展している．これは群の自由積のフォンノイマン環に対する類似に基づき，自由独立性を基本におくもので，自由確率論と呼ばれている．これによって作用素環論自体の古くからある問題についても多くの進展があったし，また新たな方向へも様々な成果が得られている．このアプローチだけに限らず，非可換確率論と総称される分野には多様なアプローチ

による多様な成果がある．ランダム行列との関係も重要なポイントである．また，エントロピー概念の様々な非可換化を考えることも重要な話題として長年にわたって研究されて来ており，多くの興味深い結果が知られている．

3. 非可換位相幾何学

フォンノイマン環は「非可換測度空間」であったが，もう一種類の作用素環，C^*–環は「非可換位相空間」と考えられる．可換な C^*–環はすべて，あるコンパクトハウスドルフ空間上の複素数値連続関数環と同型になるからである．関数解析学ではしかるべき作用素の位相で閉じているような作用素の環を考えることが自然だが，この際に自然な位相の取り方が複数あるため，フォンノイマン環と C^*–環の 2 つが生じる．（弱い位相で閉じていると言うほうが強い条件なので，フォンノイマン環は論理的には C^*–環のうちの特別なものだが，そう思っても便利なことはあまりなく，別のクラスと思ったほうがいろいろ都合がよい．例えばフォンノイマン環を C^*–環と思うと，有限次元でない限り決して C^*–環としての位相では可分にならない．）そこで通常の位相幾何学の「非可換版」を目指すというテーマが発生する．これも比較的古い問題意識である．ただ可換な場合でも空間は多様体などではなく位相空間なので，展開できる一般論は限られている．そのような一般的状況で基本的な理論は，ホモロジー群，コホモロジー群などを扱う代数的位相幾何学である．これを C^*–環上でも行いたいというのは当然考えられることだが直接（コ）ホモロジー群の一般化を考えることはあまりうまく行かないことがわかっている．一番うまくいくのは，コホモロジー群の一般的な形である K–群の非可換化である．K^0–群は一般の位相空間上ではその上のベクトル束を用いて定義され，だいたい偶数次のコホモロジー群をまとめたようなアーベル群である．これは位相空間の上の連続関数環上のモジュールの言葉で書くことができ，そうすれば非可換環上でも問題なく同様に定義される．このようにして導入されるものが C^*–環の K_0–群である．（空間から関数環に移る操作は反変関手であり写像の向きが反対になる．よって，K^0 ではなく，0 を下につけて K_0 と書く．）さらに同様の考えによって非可換化することにより，C^*–環の K_1–群も定義される．位相空間の K–群と同じくボット周期性が成り立つので，一般に $K_{n+2} = K_n$ である．これに対して通常の位相空間の場合と同じく様々な完全列などが成り立つ．また，位相空間については K–群の双対にあたる K–ホモロジー群があるが，これの C^*–環版，さらに K–群と K–ホモロジー群とを合体させた，カスパロフの KK–群もある．これらの定義や基本的性質については，C^*–環の K–理論は位相空間の K–理論の一般化と言えるが，非可換環に移って初めて生じる新しい現象があることが著しい．それは，解析的によい条件を備えた単純 C^*–環のかなりのものが K–群によって完全に分類できるということである．コンパクトハウスドルフ空間上の連続関数環はイデアルがたくさんある（例えばある 1 点を一つ決めたときそこで 0 になる関数全体が極大イデアルである）ので，単純環からは程遠い．逆に言えば，単純環とは「点」が全くなくなっているのであり，ある意味でもっとも可換から遠い環である．このような状況では，同型による分類が K–群で行えるケースがたくさんあるのである．位相空間の場合にこれに対応する主張は，コンパクトハウスドルフ空間は K–群によって位相同型で分類できるということだがもちろんこのようなことは成り立たない．K–群の代わりに，（コ）ホモロジー群にしてももちろん全然だめである．このような分類理論が十分に非可換な世界に移行することによって初めて成り立つようになるということは大変驚くべきことである．なおこれについては，従順性と呼ばれる，解析的によい条件を持つ単純 C^*–環はすべて，K–理論的情報によって完全に分類されるであろうという命題がエリオット予想と呼ばれ長い間，C^*–環の分類理論における根本問題であったが，近年になってもとの予想の形のままでは不成立であることが示

された．現在様々な修正方法について研究が続けられているが，「広いクラスの単純 C^*–環が K–理論によって分類される」という考え方は今も大変重要なものである．K–理論を作用素環の枠組みで考えることは，1970 年代に始まる比較的新しい考え方だが，基本的に重要なことは射影演算子の同値類を考えることであり，作用素環論ではフォンノイマン以来の自然な考え方と言ってよい．また，与えられた作用素環について，$n \times n$–行列環 $M_n(\mathbf{C})$ をテンソル積して考えることが K–理論において重要だが，これは様々な非可換空間の考察において，また作用素環そのものの一般論においても大変重要な考え方である．

また位相幾何学においては様々な次元の概念がある．多様体であれば位相の概念は明らかだが，単なる位相空間でも「被覆次元」のように次元に当たるものを定義する様々な方法がある．これについても一般の非可換 C^*–環に対して実次元，複素次元の類似を定義する方法がある．ただし，これらについては本当に次元と呼ぶべき役割を果たしているのかどうかについてはあまりよくわかっていない．たちのよい C^*–環はむしろこのような定義の意味で 0 次元である傾向があるからである．

4. 非可換微分幾何学

作用素環の歴史において，上の 2 つより新しく出てきたものがコンヌの非可換 (微分) 幾何学である．(新しいとは言ってももう 20 年以上は経っているものだが.) 全く一般の (コンパクトハウスドルフ) 空間というのは相当変なものがたくさんあるのであり，通常幾何学の対象になっているのはもっと「よい」空間である．そこで可微分多様体，さらにはリーマン多様体の非可換化を考えたいのである．これらのうちで自然な関数は無限回微分可能関数である．しかし，C^*–環の公理付けの類似の問題として，多様体上の無限回微分可能関数のなす環を抽象的に特徴付けて非可換環に拡張するということはできていない．そこで，非可換多様体の一般論を展開するというよりはむしろ興味深い個別の例を詳しく研究することが行われている．しかし，一般の非可換多様体の定義がないわけではない．定義はスペクトル三つ組と呼ばれるもので，作用素環とヒルベルト空間にディラック作用素に相当する特別な作用素を加えたものが対象である．またここでも K–群が重要な役割を果たすが，それと双対な役割を果たすのは，サイクリック・コホモロジーである．これ自体は純代数的に任意の環に対して定義されるものだが，C^*–環ではなく，その中で稠密な「滑らかな関数環の非可換版」に対して考えることに大きな意義があり，これと K–群との間に自然なペアリングが考えられる．

一方具体例の研究では一番古くから進んでいるのが非可換トーラスと呼ばれる C^*–環である．一般に n 次元でできるが，簡単のため $n = 2$ の場合を説明しよう．($n = 1$ では非可換にできない.) 2 次元トーラスを $S^1 \times S^1$ とし，S^1 を複素平面の絶対値 1 の複素数全体と思う．すると，$S^1 \times S^1$ の第 1, 2 座標を取る関数を z_1, z_2 とおくと，これらは $S^1 \times S^1$ 上の連続関数のなす C^*–環の中の互いに交換する 2 つのユニタリ作用素 u_1, u_2 と思える．そこでこの可換関係 $u_1u_2 = u_2u_1$ を少し変えて $u_1u_2 = e^{2\pi i\theta}u_2u_1$ という関係式を満たす 2 つのユニタリ作用素 u_1, u_2 から生成される C^*–環を考える．ただしここで θ は実数で無理数とする．このような関係式を満たす 2 つのユニタリ作用素の組はあるか，またあったとしてそれらで生成される C^*–環が互いに同型か，という問題があるが両者ともイエスであることがわかるので，こうしてできる C^*–環を A_θ と書いて 2 次元非可換トーラスと言う．この C^*–環は θ の取り方に依存する．この C^*–環の任意の元は形式的に $\sum_{n,m} c_{n,m}u_1^n u_2^m$ と展開できる．これはフーリエ級数展開の類似である．2 次元トーラス上の連続関数の場合はこのようなフーリエ級数展開をしたとき，無限回微分可能関数は係数が急減少するという条件で特徴付けられる．そこで，非可換 C^*–環 A_θ の場合も上の展開で係数が急減少するようなもの全体を「滑らか」な部分環と思うのである．この上では，「微

分」にあたる作用素もすぐに定義でき，この上で，ヤン・ミルズ方程式など様々な「微分幾何」が展開できるのである．なお，この C^*–環はもちろん，前節で説明した，「解析的によい」クラスに入っており，K–理論で分類できる．また，「実次元」にあたるものは 2 ではなく，0 になっているのである．

また，この A_θ は無理数回転 C^*–環とも呼ばれる．S^1 上で $2\pi\theta$ 回転するという力学系から生じる C^*–環でもあるからであるが，一般に力学系から生じる C^*–環の非可換幾何学的見方にもふれておこう．一般に何らかの（可換な）空間に群が作用しているとしよう．この作用で「割った」空間を考えることは自然であり，それは関数環の言葉で言えば，もとの空間上の関数のうち，群作用で不変なもの全体を考えることにあたる．ところが群作用で割った商空間にたちのよい構造が入らないとか，群作用で不変な自然な関数は定数しかない，といったことが簡単に起こる．例えば上で述べた，S^1 上で $2\pi\theta$ 回転の場合，商空間には自然なハウスドルフ位相は入らないし，またルベーグ測度に関する可測関数で考えても，回転で不変な関数は定数関数とほとんど至る所一致してしまう．このような場合でも，「商空間の上の関数環」にあたるものが作用素環論的に捉えられるということが一般的に重要である．それには，群の半直積に当たる接合積と呼ばれる構成を用いる．これは本質的にはフォンノイマンによって始められたもので，空間上の関数環から，群作用で不変な部分環に移るのではなく，群作用を表すユニタリ作用素を添加して，より大きな非可換環を作るものである．S^1 上の $2\pi\theta$ 回転のとき，この接合積によって得られる C^*–環が上の A_θ である．これからも非可換幾何学において A_θ が最も基本的な例として現れることがわかる．

上の無理数回転 C^*–環の例では S^1 上の $2\pi\theta$ 回転という通常の幾何学の枠組みで考えられる問題に対して，非可換な C^*–環を作っていることにも注意しよう．一般化された非可換多様体といったものに全く興味がなく，普通の多様体や普通の位相空間にだけ興味があったとしても，その上の群作用というのはごく自然に出てくる状況であって，それに対し非可換幾何学の手法が役に立つのである．これに似た状況で，多様体の葉層の研究にも非可換幾何学が使われている．これもやはり，葉の空間を考えたいのだが，自然な構造が入らないことがよくあるので，代わりに「葉の空間の上の関数環」にあたる非可換作用素環を考えるものである．葉に沿った偏微分作用素のアティヤー・シンガー型指数定理などもこの設定で研究され，様々な一般化がなされている．さらに，通常の幾何学の問題に非可換幾何学を用いるという方向では，ノビコフ予想の研究が有名である．これは，ある幾何学的量のホモトピー不変性を主張する予想であり，今も未解決であるが多くの場合について，非可換幾何学の手法により肯定的結果が得られている．さらにそれを拡張したバウム・コンヌ予想と言うものも盛んに研究されており，非可換幾何学における中心問題の一つである．これについては一番強い形の予想は不成立であることが最近わかってきたが，肯定的な結果も多数得られており，今後も多くの発展が期待できる．

この他いろいろな球面などの空間に対し，その「非可換版」が研究されている．特にストリング理論に関連して，自然に非可換空間が現れると考えられており，多くの数理物理学者の研究がある．それは，量子力学において位置と運動量を表す作用素が非可換になったことをさらに進めて，空間座標を表す作用素たちも非可換にするという考えである．このアプローチは多くの研究者を集めており，論文の数も爆発的である．また，コンヌとその共同研究者たちは，リーマン・ゼータ関数を初めとする様々な複素関数を非可換幾何学の手法を用いて研究しており，現在も様々な発展が続いている．類体論，虚数乗法などの代数学における理論も非可換幾何学と結び付けられており，その発展はとどまるところを知らない勢いである．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

代数学から見た「空間」

加藤　文元

1.「点」と「構造」

ブルバキ以来の数学は「空間とは構造を持った集合である」というセントラルドグマ，つまり

空間 ＝ 集合（点概念）＋ 構造（秩序）

という考え方に良くも悪くも慣れている．例えば，位相空間とは位相構造という秩序の入った点集合であるといった考え方である．そしてそれ以後の空間概念の変遷は，この楽園的セントラルドグマを発展させ，超えて行くという方向で推移して行ったように思われる．

代数学の場合は，「空間」や「点」に関する洞察が思想的背景にある場合でも，その基本戦略は「はじめに構造ありき」というものであったと思う（図 1）．つまり代数の言語で記述された「構造（＝秩序）」が「点」のあり方を統制し「空間」を規定する，というものである．これを徹底させると，「空間」が直観されなくても，あるいは「点」が無くても，「構造」さえあれば十分に幾何ができるということになるわけで，これは周知の通り「空間」の

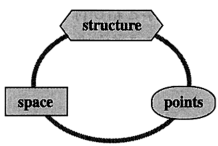


図 1　「構造」優位のトリコトミー．

一つの重要な捉え方となっている．以下，ブルバキズム以降の代数学における「空間」の基本的考え方の一端を，いくつかの事項にまとめて述べようと思う．ただし，述べたいのは空間の変遷の歴史ではないので，議論は歴史的順序に沿ったものではないことを注意しておく．

2. スキーム——「式そのもの」を表す空間

古典的な代数幾何学は，アフィン空間内の有限個の多項式の零点集合という図形を扱う学問であった．つまり，そこでの空間は「方程式」の「解」全体，つまり「解空間」なのであった．しかし，グロタンディークによって創始されたスキーム理論においては，もはやこの図式は当てはまらない．端的に言って，スキーム理論においては「方程式」そのものが「空間」なのである．つまり，スキーム論の勃興によって

空間：解全体 $\rightsquigarrow$ 空間：式

という発想のシフトが起こった．その背景には「解空間という図形の研究」から「基底変換で不変な性質の研究」への，代数幾何学における基本的考え方のシフトがある．その辺りの事情を，シュプリンガー版の EGA I[8] の Introduction を参考にして，もう少し詳しく見てみよう．

例として

$$y^2 = x^3 - x$$

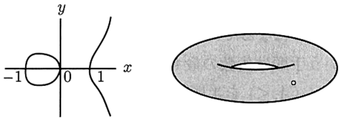


図 2　$y^2 = x^3 - x$ の $\mathbb{R}$–値点と $\mathbb{C}$–値点.

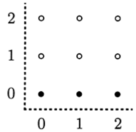


図 3　$y^2 = x^3 - x$ の $\mathbb{F}_3$–値点.

という式を考える．実平面内でその解全体は図 2 左のようになる．また，複素数の範囲まで広げると，これは図 2 右のような，ドーナツ面から一点抜いたような図形になることも知られている．

確かに $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ のような大きな体で考えると，それは「幾何」の対象となり得る図形の様相を十分に持つ．しかし，例えば 3 元体 $\mathbb{F}_3$ で考えると，それは図 3 に示すように，図形としての情報は極めて少ない．実際，これは x–軸（$y = 0$）と区別が付かない．

というわけであるから，古典的な代数幾何学は主に $\mathbb{C}$ 等の代数閉体で作業する必要があった．しかし，それでも例えば $y = 0$ と $y^2 = 0$ のように，点集合としては区別できない式がある．この最後に挙げた 2 つの「式」を区別する必要性は，IHES 版の EGA I[7] の Introduction に説得力を持って語られている．

したがって，「解空間」ではない「式」そのものの情報を取り出す必要がある．スキーム論の基本的な考え方は，「式」があったとき，その「解」を考える環を積極的に取り替えることで，そのような環の取り替えで不変な性質を研究しようとすることである．

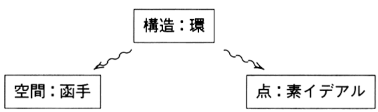
「佐藤幹夫の哲学」として有名であるが，方程式は環である．そして解とは環準同型である．上の例の場合，$\mathbb{Z}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbb{Z}[x, y]$ をイデアル $I = (y^2 - x^3 + x)$ で割って得られる剰余環 $A = \mathbb{Z}[x, y]/I$ が，その「式」を表す環である．任意の可換環 R があったとき，R 上の解全体は A から R への環準同型全体に他ならない．こうして，「式」は可換環の圏から集合の圏への「表現可能函手」

$$R \mapsto \mathrm{Hom}(A, R)$$

に置き換えられた．この函手こそ，スキーム論が「空間」として採用する対象である．

では「点」は何か．「解」としての古典的点は，このような「空間」の点とはできないであろう．これらは「有理点」として区別され，正しい「点」概念としての地位を失うのである．では，正しい「点」とは何か．EGA は，それを「体に値を持つ有理点のある同値類」である，として導入する．ここでも体は動かして考えている．この同値類は A から体への準同型の核，即ち素イデアルで忠実に代表される．したがって，環 A という構造が表す空間 $\mathrm{Spec}\, A$ の点として，A の素イデアルが採用される．この「点」の考え方の背景には，ゲルファント以来の「環のスペクトルとしての点」という思想があることは明白である．

以上，要約すると次のような図式が描けるであろう．



これよりわかるように，スキーム論における「空間」の考え方はブルバキズム的セントラルドグマから一歩踏み出している．また，上ではアフィンスキームの場合しか論じなかったが，その貼り合わせである一般のスキームについても同様の図式が当てはまる．

実際には，環 A から決まる $\mathrm{Spec}\, A$ という空間は局所環付空間で表現できる．そしてこれによって「貼り合わせ」が意味を持つのである．即ち，$\mathrm{Spec}\, A$ は上で採用した素イデアル全体の集合にザリスキー位相と呼ばれる自然な位相を入れ，A

およびその局所化の元を正則函数と見なすことで局所環の層が乗ったものである．確かに，この空間はスキーム論の扱う「空間」として正しいものであるのだが，これはいささか誤解を生みやすい．つまり，この「空間」を「図形」として扱うのではなく，あくまでも環の取り替え，いわゆる基底変換で不変な性質を研究するのがスキーム論の考え方なのであり，その意味でスキーム論の「空間」は函手である，といったほうが誤解が少ない．もちろん，これは単に心理的な問題であり，数学的対象としては両者に本質的な違いはないとも言える．

3. 束——「空間」のコード化

スキーム論が上述の「基底変換で不変な性質」を調べる上での最も重要な武器として，層およびコホモロジーの理論がある．これらの理論においては，位相空間の「点」は副次的な役割しか果たさず，むしろ「開集合」の果たす役割のほうが大事になる．点の必要性は主に層 $\mathscr{F}$ の点 x での茎 $\mathscr{F}_x$ を考える必要性において現れるのであるが，そこでは「点 x」よりむしろ「x の開近傍全体」が本質的であり，点の役割は開集合からなるフィルターのそれに取って代わられるのである．その意味で，層の理論は「構造」から「点」に至るこれまでの図式を，その途中に「開集合」を挟んだ

構造 ⇒ 開集合 ⇝ 点

という形のものに置き換えたと言える．

翻って考えてみれば，そもそも「位相空間」という概念においてすでに，その「構造」を表す言語が「開集合」なのであったから，この考え方のシフトはスキーム論のみならず更に一般の空間概念にも適用できる根本的なものである．しかし，古典的な位相空間の考え方と違うのは，点集合があって開集合があるのではなく，そもそも開集合が先にありきであるということである．重要なのは「点」と「開集合」という新たなディコトミーであり，その各々のウェイトの変化である．

この考え方に従えば，「構造」は「点」という考え方から独立な，開集合系という「コード」を提供することになるであろう．そしてこの「コード化」という手順は代数の最も得意とするものである．

$A=(A,\leq)$ を半順序集合とする．A の任意の部分集合 S について $\sup S$ (resp. $\inf S$) を S の A 内での最小上界（resp. 最大下界）とする．A の任意の有限部分集合 S について $\sup S$ および $\inf S$ が存在するとき，A は「束」であると言う．このとき，$a,b\in A$ について

$$a\vee b:=\sup\{a,b\},\quad a\wedge b:=\inf\{a,b\}$$

と書く．また，$0=\sup\emptyset$ とか $1=\inf\emptyset$ といった記号も用いる．任意の $a,b,c\in A$ について，分配法則 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ が成り立つとき，束 A は「分配的」であると言う．

例えば，X を位相空間とするとき，その開集合全体のなす順序集合 $\mathbf{Ouv}(X)$ は分配的束である．この場合は更に強く，任意の部分集合 S について，その sup が存在し，これについて強い分配法則が成り立つ．このような束を特に「フレーム」と言う．一般に，分配的束 A について，その部分集合 $I\subseteq A$ が「イデアル」であるとは，次の 3 条件が成立することである：(1) $0\in I$, (2) $a,b\in I\Rightarrow a\vee b\in I$, (3) $a\in I$, $b\leq a\Rightarrow b\in I$．フレーム $\mathbf{Ouv}(X)$ の場合，X の各点 $x\in X$ について，x を含まない $\mathbf{Ouv}(X)$ の元全体 $P(x)$ はイデアルを成す．このイデアルは更に強く，素イデアルである．一般に分配的束 A のイデアル I が「素イデアル」であるとは，次の 2 条件が満たされることである：(1) $1\notin I$, (2) $a\wedge b\in I\Rightarrow a\in I$ or $b\in I$.

こうして X から $\mathbf{Ouv}(X)$ の素イデアルの全体 $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Ouv}(X)$（ここにはスキームの場合のザリスキー位相と同様の方法で自然な位相が入る）に写像 P ができた．容易にわかるように，$x\in X$ について $P^{-1}(P(x))=\overline{\{x\}}$ が成立する．この写像 P が単射であるとき，位相空間 X は sober であると言う．これは任意の既約閉集合が唯一の生成点を持つ，ということと同値である．例えば，スキームの底空間は sober であるし，ハウスドルフ

空間はsoberである．

こうして，soberであるという仮定の下には，開集合系からなる束の情報だけで点が回復することがわかった．これについて更に興味深い事実を述べよう．位相空間 X が連接的であるとは，次の4条件を満たすこととする：(1) X はsoberである，(2) X は準コンパクトな開集合からなる基底を持つ，(3) X は準分離的である，つまり，有限個の準コンパクトな開集合の共通部分はまた準コンパクトである，(4) X は準コンパクトである．連接的位相空間 X に対しては，その準コンパクト開集合全体 $\mathbf{QCOuv}(X)$ は分配的束になる．

ストーンの表現定理[5)]．**DLat** で1を持つ分配的束の圏を，**CohTop** で連接的位相空間と準コンパクト連続射のなる圏を表す．このとき，$A \mapsto \mathrm{Spec}\,A$ によって圏同値

$$\mathrm{Spec}\colon \mathbf{DLat}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{CohTop}$$

が誘導される（$X \mapsto \mathbf{QCOuv}(X)$ がその準逆関手である）．

4. トポス――「構造」=「空間」

束による空間のコード化においては，「構造」と「空間」は未だ二分法の中で考えられている．しかし，グロタンディークによって創始されたトポスの理論[9)]においては，この2つの概念間の距離は限りなく零に近い．

非常に大雑把に言うと，（グロタンディークの）トポスとは層の圏のことである．より正確に言えば，位相空間上の層の圏が持つ性質を公理化し，これを満たす圏のことである．前節では位相空間という空間をコード化するにあたって，開集合系という情報に注目したのであるが，トポスにおいては，これより更に広く層全体を考える．実際，位相空間 X に付随したトポス $\mathbf{top}(X)$ とは，X 上の集合の層全体のなす圏のことである．この中においては，X の開集合は $\mathbf{top}(X)$ の終対象の部分対象として同型を除いて捉えられる．

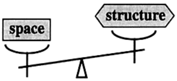


図4　「構造」か？「空間」か？．

これだけ見ると，あたかもトポスとは，束が開集合系を通じて行ったコード化を層を通じて行ったに過ぎないと思われるかも知れない．もちろん，そのような一面もあるとは思うが，多分，トポスという考え方のもっと重要なポイント（の一つ）は，これによって「構造」と「空間」が融合されているという点であると思う．いわば，トポスは

$$\boxed{\text{構造}} = \boxed{\text{空間}}$$

という方程式の解を与えている，と言える．この方程式は次の2つの意義を含んでいる．まず，最初にこれは「構造」という抽象的な対象に，「空間」という直観的な見方を与えるということ．そして逆に，「空間」という直観的，外延的対象に，ロジカルな意味を付与するということである．したがって，これは「外延とロジックの融合」という幾分公理集合論的な背景を持っていると気付くであろう．実際，トポスはグロタンディーク以後，ロジックの専門家から注目され，非常に重要な対象となったのである．このあたりの事情はマックレーンとモェールダイクの本[6)]のPrologueに詳述されている．

では，「点」はどうなってしまったのか？ 一点からなる位相空間 $\{*\}$ に付随したトポス $\mathbf{top}(\{*\})$ は集合の圏 **Sets** である．であるから，トポス E の点とは（トポスの）射

$$P\colon \mathbf{Sets} \longrightarrow E$$

のことである．しかし，点を全く持たないトポスも存在する．つまりトポスにおいては（束によるコード化においてもある程度そうであったが）もはや「点」は不可欠のものではない．

トポスという「構造」を「空間」と思うことの意義としてもう一つ挙げるならば，なにしろそれが「空間」である以上，直観的には「点=集合の

圏」の集まり，つまり「集合論のモジュライ空間」と思えることである．この視点は上述のロジックの立場において重要な役割を果たしていたように思われる．

トポス理論が数学にもたらしたインパクトは，あまりに計り知れないものがあり，これらをわかりやすく述べるのは私の手に余る．ここではこの位で簡単に済ませておきたい．

5.『それでも「点」にイエスと言う』

トポスの理論が空間概念を一新した結果，少なくとも sober な場合に限れば，一般の位相空間に関する議論はすべてトポスの議論に置き換えることができる．では，位相空間は本当に必要なくなってしまったのだろうか？「空間」と「構造」の見事な融合によって一人置き去りにされてしまった「点」は，もはやその意義を完全に失ってしまったのであろうか．

確かに，数学的には，sober な位相空間とそれに付随するトポスは互いに等価な対象であり，その違いはもはや心理的なレベルにしか存しない．しかし，その心理的なレベルでの違いはかなり大きなものであるように思われる．もう少し正確に言えば，位相空間 X を扱うことと，それに付随したトポス $\mathbf{top}(X)$ を扱うことでは，それらに対する基本的な「視点」がかなり異なる．非常に単純化して言うと，前者は「図形としての空間」という視点と親和し，後者は「構造としての空間」という視点に当てはまるように思われる．グロタンディークにとっては，スキーム論とは「式」の基底変換で不変な性質を調べることであったから，その「構造」が重要であった．であるから，その一つの到達点にトポスがあった．しかし，「図形」をこよなく愛することで幾何をする立場の人々にとっては，トポスを第一義的な「空間」として認知するのは心理的に困難である．

例を挙げようと思う．20 世紀後半に創始された「リジッド幾何学」においては，その出発点にアフィノイド代数（あるいはテイト代数）という位相環を据えている．これは（時期的にもスキーム論の創始ともほぼ呼応して）環という「構造」から空間を作る，という考えが背景にあった．そもそも，当初のリジッド幾何学が目指していたのは，p–進体等の非アルキメデス的付値体上の解析幾何学，というものであったので，何を「正則函数」として認知するか，というのが自然な出発点になったのである．

しかし，テイトによって構想された初期のリジッド幾何学においては，その「点」概念が非常に弱く，それだけでは「空間」を構成することができなかった．もう少し正確に言うと，テイトはアフィノイド代数の極大イデアルを「点」として採用したのであったが，それでは自然な位相が強すぎて，スキームを真似して函数の層を作ると本来欲しかった正則函数の概念からはほど遠いものまで正則な函数として認知しなければならなくなってしまうのである．これに対処するため，初期のリジッド空間はトポスとして抽象的に実現され，「点」の概念は犠牲にされた．それどころか，「点」集合としての空間を考えないということがリジッド幾何学では本質的なのであると信じられていたようである．

しかし，ここからが興味深いのであるが，リジッド幾何学のその後の発展を見てみると，その推移は「いかにして点を回復するか」という問いを原動力にして進んで行ったように見えるのである．例えばベルコヴィッチによるベルコヴィッチ幾何学の創始は，彼の本[1)]の Preface にもはっきり述べられているように，このような動機が背景にあったのである．「構造」さえあれば十分幾何ができる，という思想にリジッド幾何学は満足しなかったのである．

ベルコヴィッチの幾何学では，実はその点概念はまだ完全なものではなく，リジッド空間というトポスの点を的確に表したものではなかった．しかし，これとほぼ時期を同じくして，ヒューバー[4)]と藤原[2)]が最終的にリジッド空間の「点」の正しい概念に至った．そしてリジッド空間が，非常に具体的な位相空間で捉えられるようになったので

ある．

このような発展の経緯を見てみると，位相空間からトポスへ，という現代数学の発展の歴史を，むしろ逆行しているようにも見える．しかし，それはそれとしても，実はこのリジッド空間概念の変遷を通じて，リジッド幾何学は幾多の本質的な視点のシフトを経験したということも事実なのである．ここで重要だったのは，「何が正しい点か」という根本的な問いであった．現在では，藤原のリジッド幾何学の考え方に従うと，リジッド幾何学とは「形式スキームの幾何」と「双有理幾何」のハイブリッドである[3]，というテイトがリジッド幾何を創始した頃には思いもよらなかった姿が明らかになった．

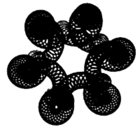
こうしてみると，単にトポスが一番偉い「空間」であって，すべからく従来の空間はトポスで言い換えられるべきである，という考え方だけからは見えてこない重要な，そして興味深い事柄が，数学の中にはまだまだ多くあるということが感じられる．やはり，「空間」，「構造」，「点」とは三つ巴の文様なのであり，それぞれの間で緊張感を保ちながら数学は発展するのであろう．将来，全く新しい「空間」の概念が発明されるまでは．

参考文献

1) Berkovich, V. G.: *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
2) Fujiwara, K.: Theory of tubular neighborhood in étale topology. *Duke Math. J.* **80** (1995), no.1, 15–57.
3) Fujiwara, K., Kato, F.: *Rigid Geometry and Applications.* Preprint submitted to Advanced Studies in Pure Mathematics, 2005.
4) Huber, R.: A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties, *Math. Z.* **217** (1994), no.4, 513–551.
5) Johnstone, P.T.: *Stone spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 3. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
6) Mac Lane, S.; Moerdijk, I.: *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory.* Universitext. Springer–Verlag, New York, 1992.
7) Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Éléments de géométrie algébrique, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, no.**4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1961–1967.
8) Grothendieck, A., Dieudonné, J.: *Éléments de géométrie algébrique I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 166, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
9) *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, Vol.**269**, **270**, **305**. Springer–Verlag, Berlin-New York, 1972–1973.

（かとう・ふみはる，京都大学大学院理学研究科）

離散と連続の狭間：Berlekamp–Massey アルゴリズム



松本 眞

1. 空間

数学における「空間」の概念は今も進歩し続けており，「空間とは何か」という問いに答えるのは永遠に不可能に思える．代わりに本稿では，「空間」概念が情報学において極めて有効に実用されている一例を紹介する．そのため，上の問いに対し次の 19 世紀的な（ある意味不完全だが有用な）一つの解答例「空間とは，演算と距離（ないし位相）の定義されている集合である」を採用する[*1)]．

例えば，実数の集合 $\mathbb{R}$ はその代表例である．本稿での主役は，実数に類似した性質をもつ形式冪級数体 $\mathbb{F}_2((T))$ である．

2. 2 元体 $\mathbb{F}_2$ とその情報学での応用

$\mathbb{F}_2$ で 2 元集合 $\{0,1\}$ を表す．この集合に通常の和と積を定義しようとすると，$1+1=2$ だけが外にはみ出す．そこで，$1+1=0$ と定義してはみ出さないようにする．このとき，$\mathbb{F}_2$ を二元体[*2)]と言う．$\mathbb{F}_2$ における 1 は「奇数」を表していると考えるのが筋が良く，$1+1=0$ は「奇数+奇数=偶数」と読むのが良い．

こんな小さな $\mathbb{F}_2$ であるが，デジタル計算機の世界では重宝されている．例えば，漸化式

$$x_{n+3} = x_{n+1} + x_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (1)$$

を $\mathbb{F}_2$ の範囲で計算してみよう．仮に初期値を $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1$ で与えるならば，

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + x_0 = 0 + 0 = 0 \\ x_4 &= x_2 + x_1 = 1 + 0 = 1 \\ x_5 &= x_3 + x_2 = 0 + 1 = 1 \\ x_6 &= x_4 + x_3 = 1 + 0 = 1 \\ x_7 &= x_5 + x_4 = 1 + 1 = 0 \\ x_8 &= x_6 + x_5 = 1 + 1 = 0 \\ x_9 &= x_7 + x_6 = 0 + 1 = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

となり，00101110010111…と周期 7 で循環する．このような，（定数倍と）和のみで記述できる漸化式を線形漸化式と言う．上の例は 3 階の漸化式だが，もう少し階数を増やして

$$x_{n+521} = x_{n+32} + x_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (2)$$

とし，初期値 $x_0, \cdots, x_{520}$ を（すべてが 0，は除いて）任意に与えると，定義された数列は周期 $2^{521}-1$ で循環することが計算機の助けで証明できる（M 系列と呼ばれ，興味深い理論が潜んでいるがここでは省略する）．

このような，01 の並んだ長い数列は擬似乱数（コイン投げの表裏のように，でたらめに 0 と 1 が並んだ数列）として計算機シミュレーションに用いられるほか，データの暗号化に用いられる．A さんが B さんに送りたい情報が，00101000 だったとする．これをメールで送りたいのだが，メールでは内容が第三者に漏洩してしまうとする．そこで，上の漸化式 (1) と初期値を用いて生成した 00101110 を，送りたい情報に桁ごとに足して得られる

$$00101000 + 00101110 = 00000110$$

をメールで送る．B さんは，同じ漸化式と初期値を用いて 00101110 を生成し，これを受け取った数列に足

*1) この定義の最も不満の残る点は，曲面など，演算が自然に定義されないものが空間でなくなってしまう点である．それを解決するのが多様体である．

*2) 「体」とは，和差積商の 4 演算が定義されある公理を満たすものを指す，現代数学の用語である．

すことで元の情報を

$$00000110 + 00101110 = 00101000$$

という具合に回復できる．A さんの行為を暗号化と言い，B さんの行為を復号と言う．このような暗号方式をストリーム暗号と言う．周期 7 ではこころもとないが，(2) を使えば周期は十分長い．A さんと B さんは，あらかじめ漸化式と初期値（521 個の $\mathbb{F}_2$ の元）を第三者に傍受されない安全な方法で連絡しあっておく．

このような暗号方式をおびやかすのは，「漸化式によって得られる数列（第三者に漏れ得る情報）から，漸化式と初期値（第三者に漏れては困る情報）を計算するアルゴリズム」である．ここで考えているシナリオは，A さんの送る 0–1 データの，例えば先頭 2000 個はすでに第三者に漏れているという状況である（例えばメールの先頭に，差出人などの定型部分があるような場合である）．この場合，暗号化されたデータに先頭定型 2000 個部分を足すことで，漸化式から得られた数列の先頭 2000 個を第三者が復元できる．これらから漸化式と初期値が求まれば，暗号は破られる．

そして，上のような線形漸化式で得られた数列に対しては，実は Berlekamp–Massey 法（以下 BM 法）という高速な計算方法により，漸化式も初期値も求まってしまうことが知られている（したがって，実用的なストリーム暗号では，線形漸化式による数列をそのまま用いてはいけない）．

3. 問題の定式化

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ を 2 元体とし，

$$\chi := (x_0, x_1, \cdots) \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$$

を $\mathbb{F}_2$ 成分の数列とする．χ が（N 階）線形漸化式を満たすとは，ある定数 $a_0, \cdots, a_N \in \mathbb{F}_2$, $a_N \neq 0$ に対して

$$\sum_{i=0}^{N} a_i x_{i+j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

が成立することである．

前節で述べた問題は次のように述べられる．

問題 3.1 数列 χ が与えられている．χ はある線形漸化式を満たすことがわかっているが，その係数はわかっていない．この線形漸化式を求めよ．特に，その中で階数最小のものを求めよ．

実際的には「線形漸化式の階数は M 以下であることがわかっている．数列は，$x_0, x_1, \cdots, x_{2M-1}$ の $2M$ 個を求めてある．このときに線形漸化式を求めよ.」という状況設定を考えるのが普通である．こうすると，第三者にとって未知なのは M 個の線形漸化式の係数であり，$2M$ 個の数列の間には M 個（式 (3) の $j = 0, \cdots, M-1$）の方程式が与えられるので，線形代数を用いても漸化式の係数を求めることができる．しかし，この方法だと M^3 回程度の四則演算が必要である．BM 法は M^2 回程度の四則演算ですみ，ずっと高速である．

4. 形式冪級数

T を変数とし $\mathbb{F}_2$ を係数とする多項式の集合を

$$\mathbb{F}_2[T] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i T^i | a_i \in \mathbb{F}_2,\ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{4}$$

で表す．掛け算・足し算は通常の多項式どおり

$$(T+1) \times (T+1) = T(T+1) + 1(T+1)$$
$$= T^2 + T + T + 1 = T^2 + 1$$

といった具合に計算できる（$1 + 1 = 0$ より $T + T = (1+1)T = 0$）．さらに，T を変数とする $\mathbb{F}_2$ 係数形式冪級数の集合を

$$\mathbb{F}_2[[T]] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i | a_i \in \mathbb{F}_2 \right\} \tag{5}$$

で表す．無限個足すのは何だか落ち着かないが，通常の冪級数の計算ルールにより，和や積が求められる．例えば

$$(1+T)(1+T+T^2+T^3+\cdots)$$
$$= (1+T+T^2+T^3+\cdots)$$
$$\quad + (T+T^2+T^3+T^4+\cdots)$$
$$= 1$$

であるから，$\mathbb{F}_2[[T]]$ においては

$$(1+T)^{-1} = 1 + T + T^2 + \cdots$$

が成り立つ．さて，前節の数列 $\chi = (x_0, x_1, \cdots)$ に対し，冪級数

$$\chi(t) := \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^{-i-1} \in \mathbb{F}_2[[t^{-1}]]$$

を考える．指数が変なのは，次の命題のためである．

命題 4.1 χ が漸化式 (3) を満たす．
$\Leftrightarrow f(t) := \sum_{i=0}^{N} a_i t^i \in \mathbb{F}_2[t]$ とおいたとき，
$f(t)\chi(t) \in \mathbb{F}_2[t]$．
$f(t)$ は漸化式 (3) の特性多項式と呼ばれている．

証明 $f(t)\chi(t)$ を展開して，$j \geq 0$ に対し t^{-j-1} の項の係数を見てみると $f(t)$ の定数項からの寄与は $a_0 x_j$ であり，1 次の項からの寄与は $a_1 x_{j+1}$ である．したがって，この係数は

$$a_0 x_j + a_1 x_{j+1} + \cdots + a_N x_{j+N} \tag{6}$$

である．$f(t)\chi(t)$ が $\mathbb{F}_2[t]$ に入る必要十分条件は t の負冪項の係数がすべて 0 となること，すなわち (6) が $j \geq 0$ で 0 となることであり，漸化式 (3) を満たすことと同値になる． □

このとき，$g(t) := f(t)\chi(t)$ とおこう．上の命題により，χ が満たす最小の階数の線形漸化式とは，

$$\chi(t) = g(t)/f(t) \quad (f(t), g(t) \in \mathbb{F}_2[t])$$

を満たす次数最小の $f(t)$ を特性多項式とする漸化式に他ならない．すなわち，問題 3.1 は

> **問題 4.2** $\chi(t) \in \mathbb{F}_2[[t^{-1}]]$ を，$\mathbb{F}_2[t]$ の元を分母分子とする既約分数式で表せ．

に帰着した．

5. 互除法

上の問題 4.2 の実数版は，少なくとも 2300 年前から考えられてきた．

> **問題 5.1** $y \in \mathbb{Q}$ が実数値として与えられている．y を，$\mathbb{Z}$ の元を分母分子とする既約分数で表せ．

ユークリッドの互除法は，この問題への解答として登場した．

いま，基準となる長さの棒 X（長さ x メートル）を用いて，棒 Y の長さ（長さ y メートル）を計ろうとしたとする．つまり，

y/x はどのような値か．

y の中に x が何個（自然数個）取れるかを計算して，

$$y = q_1 x + r_1, \quad q_1 \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r_1 < x \tag{7}$$

なる q_1，r_1 が唯一つとれる．ここで $r_1 = 0$ なら $y/x = q_1$ であり，目的は達成された．

$r_1 \neq 0$ とする．$r_1 < x$ であるから，

$$y_1 := x, \quad x_1 := r_1$$

と置き直して $y_1 = x$ の中に $x_1 = r_1$ が何個とれるかを計算して

$$y_1 = q_2 x_1 + r_2,$$

とする．以後，帰納的に

$$y_i = q_{i+1} x_i + r_{i+1}, \quad y_{i+1} := x_i, \quad x_{i+1} := r_{i+1}$$

とおく．$r_{i+1} = 0$ となったら停止する．

上のアルゴリズムに出てくる q_i は $y : x$ の比にしか依存しない．$y/x \in \mathbb{Q}$，すなわちこの比が整数比と仮定しよう．$y_i : x_i$ は i が増えるごとに整数比として簡単になっていくため，このアルゴリズムはいつか停止する．

この計算は 2 × 2 行列で見るとわかりやすい．式 (7) は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なる $q_1 \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_1 < x$ を探す（ただ一組ある）ことである．以後，n ステップ目は

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

（$0 \leq x_n < x_{n-1}$ となる唯一の q_n を選ぶ）である．

$$A_n = \begin{pmatrix} -q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと A_n は整数行列で

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる．もし L 回目で割り切れて $r_L = 0$ となれば，一般に $x_i = r_i$ であるから $x_L = 0$ となり，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_L \end{pmatrix} = A_L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

さて，帰納法により

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$$

という形をしていることが示せ，

$$a_{L+1}x + b_{L+1}y = 0, \quad a_L x + b_L y = y_L$$

となる．$\det A_n = (-1)^n$ より a_n, b_n は互いに素なので

$$y = -\frac{a_{L+1}}{b_{L+1}}$$

が既約分数表示を与える*3)

■ 6. 形式冪級数体の空間での互除法 ■

互除法を形式冪級数体の「空間」において行うことにより，問題 4.2 を解くアルゴリズムが BM 法である．おもしろいのは，「整数と実数の空間」がその類似物である「多項式環と形式冪級数体の空間」に置き換わっても互除法が働くことにある．むしろ，誤差に関しては後者のほうがうまく働く．

まず類似を述べる．正の整数は 2 進展開すると

$$a_n 2^n + a_{n-1}2^{n-1} + \cdots + a_0 2^0 \quad (a_i \in \{0,1\})$$

と展開される．多項式環 $\mathbb{F}_2[t]$ の定義 (4) との類似から，「$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{F}_2[t]$ に対応している」と見る．

次に，半開区間 $I = [0,1)$ の実数は，2 進小数展開すると

$$a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_n 2^{-n} + \cdots \quad (a_i \in \{0,1\})$$

と無限小数展開される．定義 (5) との類似から，I の類似物は

$$t^{-1} \times \mathbb{F}_2[[t^{-1}]]$$

と考える．実数は，整数部と小数部の和として表される．類似物を考えると，次の形式冪級数体と呼ばれる集合に行き着く：

$$\mathbb{F}_2((t^{-1})) := \left\{ \sum_{i=-n_0}^{\infty} a_i t^{-i} | a_i \in \mathbb{F}_2,\ n_0 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

有限桁の非負冪部分である「整数部分」と，無限桁の負冪部分である「小数部分」を合わせて得られる集合である．この集合には和，差，積が定義されるが，0 以外の元が積について可逆であることが示され，「体」と呼ばれる構造を持っている．

ポイントは，実数において互除法を可能ならしめた剰余原理 (7) がここでも成り立つことにある．形式冪級数体の元

$$x = \sum_{i=-n_0}^{\infty} a_i t^{-i} \quad (a_{-n_0} \neq 0)$$

の次数を $\deg(x) := n_0$ で定義する．すなわち，冪級数展開に現れる最高次の項 t^{n_0} の次数とする．0 の次数は $-\infty$ とする*4)．

形式冪級数体に対して剰余の原理はそのままの形で成り立つ．$x, y \in \mathbb{F}_2((t^{-1}))$ $(x \neq 0)$ に対し，

$$y = q_1 x + r_1, q_1 \in \mathbb{F}_2[t], \quad \deg(r_1) < \deg(x) \tag{8}$$

なる q_1, r_1 が唯一つとれる．証明は，$\deg(y) < \deg(x)$ なら $q_1 = 0$, $r_1 = y$ ととればよい．そうでないときは，y と $t^n x$ の次数が一致するような自然数 $n \geq 0$ がとれるから，$y' := y - t^n x$ とおくと y' の次数は y より小さくなる．$\deg(y') < \deg(x)$ ならば $q_1 = t^n$, $r_1 = y'$ とおけばよい．$\deg(y') \geq \deg(x)$ ならば再び $\deg(y') = \deg(t^{n'}x)$ となる n' を使い，$y'' = y' - t^{n'}x$ とおいて，$\deg(y'') < \deg(x)$ ならば $q_1 = t^n + t^{n'}$, $r_1 = y''$ とすればよい．さもなければ，同じ操作を繰り返せばよい．

これにより，$x, y \in \mathbb{F}_2((t^{-1}))$ が与えられ，比 y/x が $\mathbb{F}_2[t]$ を分母分子とする分数式として表せることがわかっているとき，その既約分数式を求めるアルゴリズムは実数の場合と全く同じように互除法で与えられる．

■ 7. Berlekamp–Massey 法 ■

さて，上の方法を問題 4.2 に適用するには，$y = \chi(t) \in \mathbb{F}_2[[t^{-1}]]$ という無限冪級数の演算が必要となり，そのままでは計算機上で実行できない．これを克服したのが BM 法である．線形漸化式の階数が高々 M だとわかっていると仮定する．このとき，y の近似である $y' := y \bmod t^{-2M-1}$ (t^0 から t^{-2M} までの項のみ残し，それ以上の負冪の項を取り除くことをこう表す) が求まれば，それに対する互除法で既約分数式が求ま

---

*3) なお，A_L^{-1} を使って x, y を解くと $x = (-1)^{L+1} b_{L+1} y_L$, $y = (-1)^L a_{L+1} y_L$ となり，a_{L+1} と b_{L+1} が互いに素であるから y_L は x, y の「最大公約数」となる．このとき $a_L x + b_L y = y_L$ となる $a_L, b_L \in \mathbb{Z}$ も求まっている．

*4) deg を用いて「x のノルム」を $|x| = 2^{\deg(x)}$ と定義し，2 元 $x, y \in \mathbb{F}_2((t^{-1}))$ の距離を $|x - y|$ で定義すると距離空間になる．こうして，「演算と距離」が与えられて，形式冪級数体は「空間」と呼ぶに足るものになった．

るのである．

状況を整理しよう．$x = 1$, $y = \chi(t)$ とおく．$y = g(t)/f(t)$ と既約分数で表せ，$\deg(f) \le M$ であることがわかっている．我々に与えられるのは，$2M$ 項目を超える誤差を丸めた

$$y' = y \bmod t^{-2M-1}$$

のみである．ここから $f(t)$ を求めるのが BM 法である．$x' = 1$ とおき，x', y' に互除法を行うと，商の列 $q'_1, q'_2, \cdots \in \mathbb{F}_2[t]$ を得て $n = 1, 2, \cdots$ に対し互除法が止まらない限り

$$\begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} = A'_n \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A'_n = \begin{pmatrix} a'_{n+1} & b'_{n+1} \\ a'_n & b'_n \end{pmatrix}$$

を得る．BM 法の結論は，

定理 7.1 $\deg b'_n > M$ となる最初の n を求めよ．すると，$g(t) = -a'_{n-1}$, $f(t) = b'_{n-1}$ である．

というものである．$\deg(q_i) \ge 1 (i \ge 2)$ なので $\deg(b_n)$ は単調に増大していくため，このアルゴリズムは M ステップ以内で終了し，問題 4.2 の答を得る．以下，この主張を証明する．

いま，正しい値 $y = \chi(t)$, $x = 1$ に対して互除法を行ったとして，5 節で見たとおりに $q_i, a_i, b_i \in \mathbb{F}_2[t]$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を定義する．ある L ステップ目で割り切れてこのアルゴリズムは停止し，$y = -a_{L+1}/b_{L+1} = g(t)/f(t)$, $\deg b_{L+1} = N$ となる．さて，丸め誤差を

$$\delta := y - y' \quad (\deg(\delta) \le -2M - 1) \tag{9}$$

とおく．誤差のせいで 2 つの互除法はどこで狂ってくるかを調べる．誤差のある値に対し，誤差のない互除法で得られる A_m $(m \le L)$ をかけたものを

$$\begin{pmatrix} x''_m \\ y''_m \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とおこう．$m \le L$ より $\deg(b_m) < \deg(b_{m+1}) \le \deg(b_{L+1}) = N$ であり，A_m の成分の次数は N 以下である．誤差を評価しようとすると

$$\begin{pmatrix} x''_m - x_m \\ y''_m - y_m \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta \end{pmatrix}$$

により，

$$\deg(x''_m - x_m),\ \deg(y''_m - y_m) \le N + \deg(\delta)$$
$$\le N - 2M - 1 \le -N - 1 \tag{10}$$

である．この誤差が十分小さいおかげで，

$$\deg(x''_m) < \deg(y''_m) \tag{11}$$

が示される．まず互除法の動作原理から

$$\deg(x_m) < \deg(y_m) \tag{12}$$

であり，また $y_m \ne 0$ である．y_m は 1 と $y = g(t)/f(t)$ をそれぞれ多項式倍して足したものだから分母が $f(t)$ の分数式で書けるので，

$$\deg(y_m) \ge \deg(1/f(t)) \ge -N.$$

一方 (10) より y_m と y''_m の違いは次数が $-N-1$ 以下の項のところにしかないので

$$\deg(y''_m) = \deg(y_m) \ge -N \tag{13}$$

がわかる．さて (10) より得られる

$$\deg(x''_m - x_m) \le -N - 1 < \deg(y_m)$$

と (12) を合わせると，(11)

$$\deg(x''_m) = \deg(x''_m - x_m + x_m)$$
$$< \deg(y_m) = \deg(y''_m)$$

を得る．この不等式から，帰納法により $q_i = q'_i$, $x''_i = x'_i$, $y''_i = y'_i$ $(1 \le i \le L)$ が示せる．実際 $i = m - 1$ で成り立つとすると

$$\begin{pmatrix} x''_m \\ y''_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_{m-1} \\ y''_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{m-1} \\ y'_{m-1} \end{pmatrix}$$

であり，$y'_{m-1} \div x'_{m-1}$ に関する剰余の原理 (8) の商が q_m となることが (11) よりわかるので，$q'_m = q_m$．したがって，$x''_m = x'_m$, $y''_m = y'_m$．こうして $A_L = A'_L$ となり，成分を比べて $a_{L+1} = a'_{L+1}$ かつ $b_{L+1} = b'_{L+1}$ なので，誤差のある y' を用いた互除法によっても既約分数 $y = -a'_{L+1}/b'_{L+1}$ が求まることがわかった．

あとは，「初めて $\deg b'_n > M$ となる n が $L+2$ となる」ことを示せば定理の証明は終わる．$m \le L+1$ ならば $\deg b'_m = \deg b_m \le \deg b_{L+1} = N \le M$ である．したがって，$\deg(b_{L+2}) \ge M + 1$ さえ言えば証明は終わる．A'_{L+1} と A'_L を比べると

$$b'_{L+2} = -q'_{L+1} b'_{L+1} + b'_L$$

が得られ，したがって

$$\deg(b'_{L+2}) = \deg(q'_{L+1}) + \deg(b'_{L+1}) \qquad (14)$$

であるが，q'_{L+1} は y'_L を x'_L で割った商であり $\deg(q'_{L+1}) = \deg(y'_L) - \deg(x'_L)$．帰納法で $x''_L = x'_L$, $y''_L = y'_L$ が示されているので，$x_L = 0$ と $m = L$ における誤差評価 (10) より

$$\deg(x'_L) = \deg(x''_L) \le N - 2M - 1.$$

一方 (13) より $\deg(y'_L) = \deg(y''_L) \ge -N$ だったから，

$$\deg(q'_{L+1}) \ge -N - (N - 2M - 1) = -2N + 2M + 1.$$

よって (14) に代入して

$$\deg(b'_{L+2}) \ge (-2N + 2M + 1) + (N)$$
$$= M + (M - N) + 1 \ge M + 1.$$

以上で証明が終わった．

8. 終わりに

BM 法は暗号の攻撃に有用なほか，擬似乱数発生パラメータの探索に利用されている．2300 年のときを超えて「互除法」は現代情報学に大きな役割を果たし，数学の普遍性を物語っている．

互除法という幾何的なアルゴリズムが「実数の空間」から「形式冪級数体 $\mathbb{F}_2((t^{-1}))$ の空間」へジャンプできた理由は，双方が「演算と距離を持ち，剰余の原理を満たす」という共通性を有していたためである．数学の進歩は，一見異なる対象に対し，抽象的で統一的な見方を提供してくれる．こうした抽象的空間概念の有用性を見るのが本稿の目的であった．

解きたい問題 3.1 は離散的であったが，BM 法はそれを形式冪級数体の空間で捉え直し，逐次近似という連続的な手法により解を求める．この点で，形式冪級数体や BM 法は離散数学と連続数学をつなぐ架け橋の一つと言える．

なお，BM 法の原論文[1)]の証明は本稿の証明とかなり異なり，筆者には難しい．

参考文献

1) E. R. Berlekamp: Algebraic Coding Theory, McGraw–Hill, 1968.

（まつもと・まこと，広島大学大学院理学研究科）

名著に親しむ
――特集から広がる読書案内――

長谷川　浩司

空間って何だろう

「空間って何ですか.」と，入学したての学生さんに聞かれることがある．線型代数や何かの雑談がきっかけだったりするが，お茶を濁してしまうことも多い．正面切っては答えにくいなあと思ってのことだ．

振り返れば古代ギリシアにおいて，ゼノンのパラドックスが時空のあり方を問うていた．時空の無限分割の可否を問う「アキレスと亀」は学生時代，実数論のついでに「限りない追いかけっこも，無限和の収束により有限時間に終了する」という形で納得したものであった．個体発生は系統発生を繰り返す？（「飛ぶ矢」や「スタジアム」も，運動は不可能という主旨で忘れがたい.）実数論は古典力学的世界を記述する実数の体系に矛盾がないかに答えたと言えよう．

古典的世界観の下，空間と言えば高校までは「素朴に・目の前にある・このユークリッド空間」を意味しただろう．相対論と量子論を経て「空間とは何か」は今も先端的な問いである．時間はもちろん，物質も空間を曲げる幾何学的存在である．その物質の構成要素も，時空の対称性を反映しつつ量子的な対象である．極微の空間を連続体と想定して良いか？ はリーマンも問うていた．自分が新入生の頃，物理の時間に「時間も連続的と思われているがそうでないかもしれない」と聞いたのも印象に残る．かくて初めの質問にも　どう答えたものかなあ，何を聞きたいのかなあ　と苦笑し，深谷賢治『これからの幾何学』（日本評論社）（冒頭の章は「空間とは何か」である！）を挙げたりする．

粒子の生成消滅などは空間そのものに十分精妙な構造があることを示している．これに本格的に答えたのは場の量子論である――が，深いだけに難しい．光と電子という極小の系ですら繰り込みを要し大変だった*1)．唯一の現実が体系化可能か？ とも思うが，幸いに古典を拡張する枠組みが整備されつつ，整備しつくせず今日に至っているというべきであろう．

数学的概念で物理世界を統制すべしという原理を広く知らしめたのは，ワイル「空間・時間・物質」だろうか．以来用いられる数学は途方もなく広範囲となり，代数でとくに顕著だと思う．なぜ代数か？ 記述できるものすなわち代数だからであろう：異論もあろうが，これについては是非佐藤講義録を挙げたい．背景にはグロタンディーク的「空間そのもの」の反省があり，シャファレヴィッチ『代数学とは何か』（シュプリンガー・フェアラーク東京）はそうした深い概念まで紹介する手軽で希有な本である．（ちなみに代数多様体のゼータ関数と量子場の分配関数の類似はどこまで深いだろう？ p 進世界は量子物理の夢を見るか？）

ラマヌジャンの世界も，究極の空間概念と無縁でないだろう．実際，統計物理の可解模型にその一端が関係するというのが 20 世紀後期のバクスターによる一大発見であった．「空間・時間・物質」の統一的理解を目指しつつ，物理学は重力の量子化などの深刻な困難を抱えて今日を迎え，その結果弦理論の発展形に至ったことは本特集でも語られていよう．最新の地点の理解は（私に）困難だが，サボーの本は薄いながらオハナシでなく読めて（数学の者には）有難い．

物理定数が最終的に数学ですべて決定されるべきだという期待はワイルにもあった．今もファデーエフは「数学的モジュライとして 3 つの次元（M, L, T）が説明されるべきである」，カルティエは「絶対ガロア群と物理定数のガロア群は関係するはずだ」などと言う．どちらも眉を湿して聞いたほうが良さそうだが，今後も我々はこのような言葉に代表されるイデアに向かうべきであろう．そのためにも最後に『ユークリッド原論』を挙げるべきかもしれない．初心にかえるべく．

（はせがわ・こうじ，東北大学大学院理学研究科）

*1)　片山泰久「光―電子系の理論」岩波講座「現代物理学の基礎」11『素粒子論』(1974) など．

「幾何学の基礎にある仮説について」(1854)



リーマン論文集所載，足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介編訳，朝倉書店，2004 年

リーマンが教授資格講演としてガウスの前で語り，興奮したガウスが帰り道でドブにはまって死期を早めたといういわくつき．論文であり成書ではないが，入れ物と独立な内在的概念としての「空間」を初めて説いた教書というべきであろう．極微の世界を連続体と思ってよいか？ と疑問を述べさせたのは，ゼノンなどギリシアの古典の重みだったかもしれない．

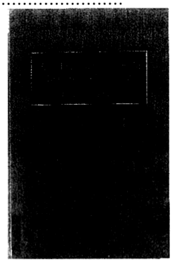


佐藤幹夫講義録(1984年度・1985年度1学期)

佐藤幹夫述，梅田　亨他記，京都大学数理解析研究所刊，1989 年

述者の広汎な数学観に圧倒される経験ができ，貴重である．「ソリトンの佐藤理論」を講じつつ無限次元の対称性（これも代数的に目に見える形で扱うべきとされる）により統制されるべき世界の典型を示したというべきであろう．梅田氏曰「この講義を聞いてホモロジーの考え方におそれ——というか肌身にあわない違和感——がなくなった．偉大な先生から直接聞くのは良いことだと実感した」．

Exactly Solved Models in Statistical Mechanics



Rodney J. Baxter 著，Academic Press, 1982 年

統計物理において 2 次元 Ising を超える可解模型を得ることは長く空白であった．Baxter はそこに「ナルニア国物語の火を吐くライオンの如く世界を造った」（三輪）．数学としても量子群あるいは組紐圏の発見につながる重要事であり，グロタンディークのガロア群研究にも関係する．マクロの挙動はミクロの微妙な詳細によらないとする統計物理のユニバーサリティの教えによれば，マクロから認識される空間というものはミクロにはこういう世界でもあり得るのだろうか．



An Introduction to String Theory and D-brane Dynamics

Richard J. Szabo 著，Imperial College Press, 2004 年

大学院生（日本で言えば博士課程）向けの集中講義の記録であり，120 ページあまりという薄い本ながらもオハナシでないようにブレインの話まで書いてある．材料の厳選は，あるいは専門家には不満であるかもしれないが，表現論（数学として定式化しやすい）になじみがあれば読みやすい本であり邦訳が待たれる．必要な表現論は，例えば脇本実の『無限次元リー環論』（岩波書店）などで補えるだろう．

書評



トポロジー入門

田中利史・村上 斉 著，B5 版，216 頁，本体 1886 円，サイエンス社

これは大学の学部 3 年生程度を対象とする，代数的位相幾何学の入門書で，その主題は単体的ホモロジー群と基本群である．著者の二人はトポロジー，特に低次元多様体論の第一線で活躍している専門家である．

本書の記述はとにかく懇切丁寧である．予備知識のない学生，あるいは数学的なものの考え方や議論に慣れていない学生でもわかるように，しつこいほどに細かい説明が書いてある．この手の話題では非常に珍しい本である．

位相幾何学（トポロジー）は，19 世紀末頃にポアンカレというフランスの数学者が創始したと一般には考えられている．彼は空間のホモロジー群や基本群を定式化し，それを 3 次元多様体等の幾何学的対象の研究に用いたのである．群などの代数的な対象を幾何学的な対象に対応させて研究することは，その後の位相幾何学において非常に有効な手法であることが確認され，今では「代数的位相幾何学」と呼ばれる分野を形づくっている．そこで，大学における位相幾何学のカリキュラムでは，集合論と一般位相空間論を勉強した後に，多様体論の講義と並んで代数的位相幾何学の講義が行われることが多くなっている．

ところが，実際に講義をしてみたり，あるいは講義を受けてみたりするとわかるのであるが，代数的位相幾何学というのは大変とっつきにくい．特に幾何学的対象に対してそのホモロジー群を定義しようとすると，準備がかなり必要であり，定義ができたとしてもその幾何学的意味が全くわからないようになってしまう．とても大事だが，マスターするのは並大抵ではない，そういうシロモノなのである．

著者らは，きっとそうした現状に一抹の憂いを覚え，初学者にもわかりやすい教科書的な本を目指したのではないだろうか．冒頭でも指摘したように記述は丁寧であるし，読者への配慮も十分にされている．特に本文中，読者が自分で確認作業をする必要がある事柄には，きちんと「確認」というコメントがつけてあるのは初学者には有難いことであろう．

また著者も書いているように，この本の記述を読むと，抽象的な議論の部分で引っかかっても，説明図や具体的な例を見ることで「わかったような気」にさせてくれる．これは大事なことである．ただし，数学書ではよくあることであるが，本書には誤植がかなりあるし，後のほうに行くに従って細かい証明に不十分なところが散見される．より専門的なことを学ぼうとする意欲ある読者はそうした点に気をつけて読まれることをお勧めする．

なお演習問題にはすべて解答がついている．略解でお茶を濁しているようなものはほとんどない．長い解答については，サイエンス社のウェブページで見れるようになっている．至れり尽せりのサービスである．さらに，演習問題に過去の大学院入試問題が多数使われているのも注意を引く．それにしても，これほどにホモロジー群の計算が出題されていたとは驚きである．出題者が，ホモロジー群の計算が可能でかつ適度に難しい空間の例をいかにして思いついたのかを想像すると，その苦労が思い浮かぶようである．

本書では，必要な代数学からの準備についても一章を割いて説明している．ホモロジー群の細分不変性，単体近似定理も真面目に証明し，最後には単体的ホモロジー群の位相不変性もきちんと証明している．この丁寧さでそこまで証明できるというのは驚きである．さらに本書の目玉は，トーラスのホモロジー群を，それを 18 個の三角形に分割する具体的な単体的複体のホモロジー群として，定義に従って計算していることであろう．27×18 とか 9×27 といった巨大な行列の基本変形が逐一説明されている（残念ながら本にはないが，ウェブページにある）．こんな力ずくの計算を書き下した類書はない．これは断言していい．著者のサービス精神には頭が下がる思いである．（ただ欲を言えば，オイラー数に関する記述もあれば良かったように思う．）

また，最後のほうには三葉結び目の補空間の基本群や，それからデーン手術で得られる 3 次元多様体の基本群の計算も書いてある．これは実はポアンカレが考え出した有名なホモロジー 3 球面と同じものである．

こんなにも丁寧な本で，こんなにも高度なことが学習できる．お得な本である．

佐伯 修（九州大学大学院数理学研究院）

計算神経科学への招待

脳の学習機構の理解を目指して

第9回

大脳皮質

銅谷 賢治

9.1 はじめに

脊椎動物の脳を，魚類，は虫類，ほ乳類，中でも霊長類と比べると，大脳皮質の占める割合が増加し，特に霊長類や人類ではその表面積を拡大するように，多数の溝が入っているのが特徴である．この拡大した大脳皮質こそが霊長類や人類の高度な知能の源である，と考えられているが，ではその高度な知能を支える計算機構はどんなものなのだろうか？ 今回は，大脳皮質の神経回路は教師なし学習によって形成されるベイズ推定回路である，という視点を紹介する[1]．

9.2 大脳皮質の回路構造

大脳皮質の表面約2〜3ミリはニューロンの詰まった灰白質，その内側は神経線維の通る白質と呼ばれる．灰白質の断面を観察すると，6層の層構造があるのが大脳新皮質の大きな特徴であるが，各層の厚みやそれを構成するニューロンは場所によって微妙に異なる．この違いをもとに，大脳皮質は解剖学者のブローカによって約50の領野に分けられ，例えば一次運動野は第4野，一次視覚野は第17野と呼ばれる．

図9.1に示すように，大脳皮質の主な入力部位はIV層であり，多数の星状細胞が視床や他の皮質領域からの入力を受ける．出力細胞である錐体細胞は，浅層（I〜III層）のものは他の領野のIV層へ，深層（V, VI層）のものは視床やより高次の領野の浅層に出力を送る．ローカルに見ても，各層の中で興奮性と抑制性のニューロンの相互結合回路があるとともに，各層の間にも双方向の結合が見られる．大脳皮質の領野間の結合も基本的に双方向的であるが，機能的に低次の領野の浅層の錐体細胞がより高次の領野のIV層に出力を送り，より

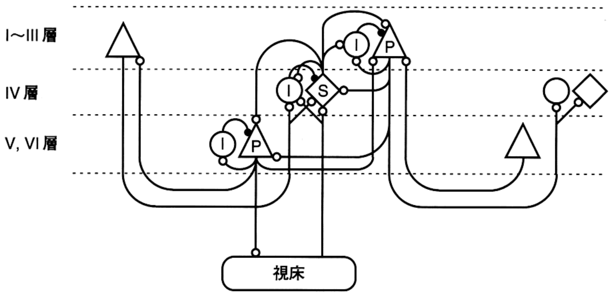


図 9.1　大脳皮質の神経回路．P：錐体細胞，S：星状細胞，I：抑制性細胞．

高次の領野の深層の錐体細胞がより低次の領野の浅層へと出力を戻す，という階層関係が見られる．

9.3 大脳皮質ニューロンの特徴選択性

大脳皮質のニューロンの特性のうち，特に詳しく調べられているのは，視覚野のニューロンである．Hubel と Wiezel は麻酔されたネコの視野に様々な視覚刺激を与え，視覚野のニューロンの応答を調べた．その結果，一次視覚野のニューロンは，網膜上の特定の部位に特定の傾きの線分が提示されたときに強く応答することが明らかになった[2)]．さらに，記録電極を皮質表面に平行に少しずつ動かして行くと，近くのニューロンは似た傾きの線分に応答することから，一次視覚野には直径 1 ミリ以下の「カラム」と呼ばれる，特定の特徴に応答する機能単位が多数並んでいることが明らかにされた．

ニューロンの応答を起こさせる網膜上の部位を「受容野」，刺激を「適刺激」と呼ぶ．視覚皮質は一次視覚野を起点に 10 以上の領野に分類されているが，より高次の領野ほど，受容野が広く，適刺激もより複雑なものになっている[3)]．後頭葉の一次視覚野から始まる視覚系は，側頭葉に向かう経路では色や形の特徴から物体の識別を，頭頂葉に向かう経路では刺激の位置や動きの処理を行い，それぞれ腹側経路，背側経路と呼ばれている．

9.4 教師なし学習モデル

大脳皮質ニューロンの特徴選択性は，各個体の感覚体験に依存して形成されることが，例えばネコを縦縞だけしか見えないような環境で育てる実験により明らかにされた[4)]．

9.4.1 自己組織化モデル

このような特徴抽出ニューロンの経験依存の形成を説明するための「自己組織

化」モデルは古く 70 年代から提案されている[5,6]．その基本的な原理は，ニューロンがある入力に対して発火応答すると，そのシナプス荷重が入力に比例して強化される，という Hebb 型のシナプス可塑性である．これに，同じ領域内の異なるニューロンは同じ刺激に応答しないような側抑制のメカニズムと，シナプス荷重値が発散してしまわないような減衰項を導入することにより，異なる特徴に対して選択的に応答するニューロンが形成されることがシミュレーションにより示されている．

自己組織化の原理により大脳皮質ニューロンの特徴選択性とカラム構造を説明しようというモデルは，その後様々に精緻化し，工学的モデルとして Kohonen による自己組織化マップ，福島によるネオコグニトロンなどが有名である．また近年では，視覚皮質の光学計測により，方向や色の選択性のカラム配置が計測されるようになり，その 2 次元的な特徴を再現するモデルも多数提案されている．

9.4.2 情報量最大化

大脳皮質の特徴抽出をより情報論的に理解しようという立場からは，「情報量の最大化」と「冗長性の削減」という観点からのモデル化が行われている[7,8]．限られた数のニューロンで表現する情報を最大化するには，相互の冗長性を削減する必要があり，両者はほぼ同じことを言っている，というのは前回指摘したとおりである．

Linsker は，ランダム画像の主成分分析により，まず最初の層では中心—周辺のコントラストを抽出するニューロンが，次の層ではエッジの傾きを抽出するニューロンが形成されることを見事に示した[7]．

その後，前回紹介したような情報量最大化に基づく他の手法である独立成分分析[9]，スパース表現[10,11]によっても，視覚野ニューロンの特徴選択性を再現するモデルが提案されている（図 9.2）．

これら，自己組織化あるいは情報量最大化のモデルは，その実装においては，

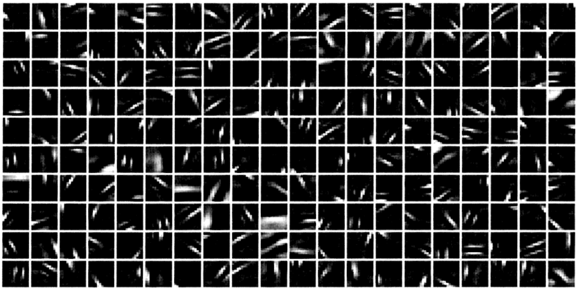


図 9.2　情報量最大化とスパースコーディングの原理により学習された視覚野の特徴抽出細胞モデル[10]．各ニューロンは，入力画像中の位置，方向，空間周波数の異なる特徴に応答する．

Hebb 型のシナプス可塑性と，領野内での相互抑制結合や，出力から入力を再構成するフィードバック結合など，大脳皮質の特徴的な回路構造を捉えたものになっている．また，大脳皮質の細胞は Hebb 型のシナプス可塑性をもつことが示されている．このことから，大脳皮質の重要な役割は，教師なしの統計的な学習の原理によって，感覚入力の中に潜む情報を抽出することだと考えられる．

9.4.3 報酬による重み付け

大脳皮質の学習は教師なし学習だ，と言っても，我々は見たもの聞いたものを何もかも等しく学習しているわけではおそらくない．聴覚野には音の周波数に応じたマップ構造があることが知られているが，Bao らは，異なる周波数の音のうち，特定のものだけを報酬と連合させると，聴覚野の上でその周波数を担当する部分が拡大することを示した[12]．報酬性の応答を示す中脳ドーパミン細胞は，大脳基底核だけでなく大脳皮質にも投射するが，この実験は，大脳皮質の学習が単純に入力の統計によって決められているのではなく，それが報酬の獲得にどれだけ有用か，という重み付けの上で行われていることを示唆している．また前頭前野には，感覚刺激や行動プランを一時的に記憶に留めておく“作業記憶” を担うニューロンがあることが知られているが，その記憶保持の強さが，ドーパミン入力のレベルに依存することが示されている[13]．このことは，ドーパミンによる報酬予測の情報が，何を記憶にとどめておくべきかという表現の重みづけに使われていることを示唆している．

9.5 ポピュレーション表現とベイズ推定

大脳皮質の情報表現の大きな特色は，個々のニューロンは刺激の変化に対してなだらかな選択特性を持ち，多数のニューロンの発火の強弱により情報が表現される，「ポピュレーションコード」が見られることである[14,16]．

例えば，一次運動野のニューロンは，腕の運動方向に関して cosine 型の幅広い応答特性を示す[15]．ところが多数のニューロンの最適運動方向を，それらの発火頻度で重み付けした「ポピュレーションベクトル」により，運動方向が良く再現されることが示されている．理論的には，単純な重荷付けによる推定は最適ではなく，ニューロンの応答特性が決められたときに入力を最も良く推定する方法は，最尤推定の原理から求められ，それが再帰結合型の神経回路で可能なことが示されている[16]．

また，ポピュレーションコーディングが最も有効であると考えられるのは，視覚と体性感覚など，異なるモダリティーの情報を統合し変換する過程である．Deneve らは，ポピュレーションコーディングを行う頭頂葉ニューロンが，感覚統合と座標変換を行い得ることを示した[14]（図 9.3）．単純な座標変換の学習は，小脳の教師あり学習の原理でも可能であるが，大脳皮質の教師なし学習で複数の感覚運動情報の同時分布が学習されるとすると，それらのうちいくつかの変数を固定し，対応する他の変数の条件付き分布を求めるという形で，双方向により柔軟な座標変換が可能になる．

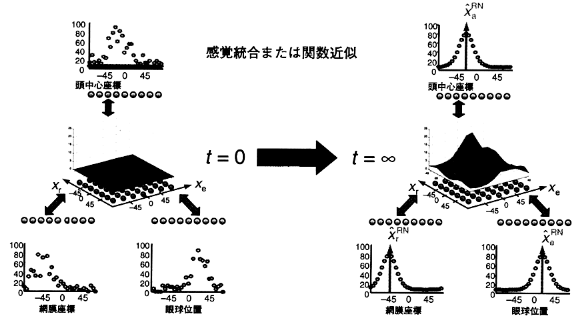


図 9.3　ポピュレーションコーディングによる情報統合モデル．各領野内の相互結合により入力のノイズ除去が行われる．また，異なる領野間の結合により感覚・運動情報の同時分布が学習され，感覚統合，座標変換などに用いることができる[14]．

9.5.1 分布推定モデル

ポピュレーションコーディングによる情報処理は，近年ではベイズ推定の立場からモデル化がさかんに進められている．一つの流れは，与えられたニューロンの応答特性のもとで，入力信号をいかに正確に推定するか，という問題設定によるものである[16]．もう一つは，各ニューロンは入力信号の基底関数を与え，ニューロン集団の発火は入力の確率分布を表す，という立場である[17]．この立場では，同じ受容野に入力された複数の刺激を表現したり，同じ入力でもそのノイズの強さを表現したり，ということが原理的には可能になる．

9.5.2 Belief propagation モデル

これまでのポピュレーションコーディングモデルの多くは，大脳皮質のニューロンの発火が確率的なのは，それは物理的にそういうものなのであって，ノイズがあるにも関わらずいかにちゃんとした情報処理ができるか，といういわばネガティブな視点から行われていた．しかし最近，大脳皮質は確率的推定を行っているという観点から，Poisson 的なスパイクの生成にはそれなりの意味がある，という新しい視点が芽生えつつある．

例えば Rao は，ニューロンのスパイク生成を考慮した上で，ベイズ推定の標準的な手法である belief propagation がいかに近似可能か，という観点から新たなモデルを提案している[18]．

9.6 おわりに

大脳皮質の学習の原理は教師なし学習である，というのが筆者の基本的な考えであるが，これにはまだ不十分な点がある．これまで，視覚野など感覚野のニューロンの特性を情報量最大化の原理から説明するモデルは成功を収めてい

るが，運動野や前頭前野の場合，単に外界から与えられた情報を正確に表現するというのではなく，これから行う行動に必要な情報表現は何かを考慮した拡張が必要である．またさらに言えば，大脳皮質の個々のニューロンの自己組織化だけでなく，大脳皮質がなぜ複数の領野に分化し，それらが必要に応じて組み合わせされるのか，というモジュールレベルでの自己組織化の原理の解明も，大きな課題である．

脳の働きをベイズ推定の視点から理解しようという立場は，近年非常に注目を集めている[19,20]．短期的には隠れ変数の推定，長期的には確率モデルの学習，という立場から，大脳皮質のダイナミクスと学習の機構に迫ろうという研究は，計算神経科学の中でも今まさに最も勢いのある分野である．

参考文献

1) K. Doya. What are the computations of the cerebellum, the basal ganglia, and the cerebral cortex. *Neural Networks*, Vol.**12**, pp.961–974, 1999.
2) D.H. Hubel and T.N. Wiesel. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture of the cat's visual cortex. *Journal of Physiology*, Vol.**160**, pp.106–154, 1962.
3) 小松英彦．視覚野における脳内表現．銅谷賢治，藤井宏，伊藤浩之，塚田稔（編），『脳の情報表現—ニューロン・ネットワーク・数理モデル』．pp.25–41, 朝倉書店，2002.
4) C. Blakemore and G.F. Cooper. Development of the brain depends on the visual environment. *Nature*, Vol.**228**, pp.477–478, 1970.
5) C. von der Malsburg. Self-organization of orientation sensitive cells in the striate cortex. *Kybernetik*, Vol.**14**, pp.85–100, 1973.
6) S. Amari and A. Takeuchi. Mathematical theory on formation of category detecting nerve cells. *Biological Cybernetics*, Vol.**29**, pp.127–136, 1978.
7) R. Linsker. From basic network principles to neural architecture. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, Vol.**83**, pp.7508–7512, 8390–8394, 8779–8783, 1986.
8) H.B. Barlow. Unsupervised learning. *Neural Computation*, Vol.**1**, pp.295–311, 1989.
9) A.J. Bell and T.J. Sejnowski. The independent components of natural scenes are edge filters. *Vision Research*, Vol.**37**, pp.3327–3338, 1997.
10) B.A. Olshausen and D.J. Field. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning sparse code for natural images. *Nature*, Vol.**381**, pp.607–609, 1996.
11) R.P.N. Rao and D.H. Ballard. Predictive coding in the visual cortex: A functional interpretation of some extra-classical receptive field effects. *Nature Neuroscience*, Vol.**2**, pp.79–87, 1999.
12) S. Bao, V.T. Chan, and M.M. Merzenich. Cortical remodelling induced by activity of ventral tegmental dopamine neurons. *Nature*, Vol.**412**, pp.79–83, 2001.
13) T. Sawaguchi and S. Goldman-Rakic, P. The role of D1 dopamine receptor in working memory: Local injections of dopamine antagonists into the prefrontal cortex of rhesus monkeys performing an oculomotor delayed-response task. *Journal of Neurophysiology*, Vol.**71**, pp.515–528, 1994.
14) S. Deneve, P.E. Latham, and A. Pouget. Efficient computation and cue integration with noisy population codes. *Nature Neuroscience*, Vol.**4**, pp.826–831, 2001.
15) A.P. Georgopoulos. Current issues in directional motor control. *Trends in Neurosciences*, Vol.**18**, pp.506–510, 1995.
16) A. Pouget, P. Dayan, and R.S. Zemel. Inference and computation with population codes. *Annual Review of Neuroscience*, Vol.**26**, pp.381–410, 2003.
17) R.S. Zemel, P. Dayan, and A. Pouget. Probabilistic interpretation of population codes. *Neural Computation*, Vol.**10**, pp.403–430, 1998.
18) R.P.N. Rao. Bayesian computation in recurrent neural circuits. *Neural Computa-*

tion, Vol.**16**, pp.1–38, 2004.

19) D.C. Knill and W. Richards. *Perception as Bayesian Inference.* Cambridge University Press, 1996.

20) R.P.N. Rao, B.A. Olshausen, and M.S. Lewicki. *Probabilistic Models of the Brain: Perception and Neural Function.* MIT Press, 2002.

（どーや・けんじ，沖縄科学技術大学院大学先行研究）

ゲノム進化学の展開

第15回（最終回） 進化の産物としての意識の階層構造

斎藤　成也

本連載も，ついに最終回となった．前回[1]は，脳という神経系の中枢がどのように進化してきたのかについて考察した．今回は，「意識」(consciousness) という，論理的にも取り扱いにくい存在がどのように生まれてきたのかについて，特にその階層構造の進化について，考えてみたい．

「意識」が生まれてくる以前の脳神経系には，当然ながら「無意識」しかなかった．生物進化のどの段階で意識が発生したのかは，議論が多いところであるが，意識を有している我々人間が，同時にそれ以前の段階である無意識を有しているのは，ある意味，当然であろう．欧米の文化では，無意識を発見したのは，フロイトだということになっているらしいが，彼よりも 2000 年ほどさかのぼる仏教思想では，すでに意識と無意識に関する深い考察が存在していた．ともかく，まず意識を考えてみよう．

意識を定義するのは，難しい．意識にはいろいろな側面が存在するからである．目覚めているとき，意識があると呼ぶが，進化的に考えれば，覚醒状態と睡眠状態が交代することは，哺乳類で普遍的に見られる現象であり，目覚めている状態を意識のある段階と考えれば，哺乳類を含む広い範囲の動物が，このレベルの意識を持っていることになるだろう．

意識をもっと限定して，自意識，すなわち自分が自分であることを認識していることとすると，意識を持つ生物はぐっと狭まってくる．人間の大多数は自意識を持っているが，いろいろな動物に鏡で自身の姿を見せて反応を調べる実験をすると，鏡の中の自分の姿を見ても，なかなかそれが自己だと理解できる動物は多くない．ただ，理解できなければ自意識がないと結論できるわけではないだろう．

自分は肉体を持っているので，外界と隔絶しており，ひとつのまとまりを持った肉体を自己が把握している状況が前提として必要であろう．この意味で，私自身の経験を少し述べたい．条件さえそろえば，誰でも体験できることである．

比較的ぬるめの湯に肩までつかり，ぼうっと両腕を湯の中に浮かべて，しばらくそのままでいよう．目は閉じておく．いい湯だなあと思っているうちに，ふと自分の腕がないことに気づくことがある．驚いて存在するはずの腕を動かすと，両腕は復活するし，もちろん目をあければそこに腕はある．無重力状態に近く，皮膚表面への刺激が湯という一定の状態に保たれているとき，おそらく我々の脳中枢は腕の存在を忘れてしまう，すなわち注意の外にいってしまうのではなかろうか．腕を動かすと，自分の筋肉の状態を検査する筋紡錘から中枢に情報が送られて，腕の存在に再び注意が向けられる．こうして，自意識の中で，腕の存在が復活するのである．

外界の状況がいかに自分の認識に変化を与えるのか，もうひとつ例をあげよう．これも私自身の体験に基づくものだが，認知心理学的には初歩的なものだろう．ただし，自身での体験という点が重要である．これも誰でも試すことのできるものである．まず，快晴が必要である．雲一つない青空．次に，周りに建物や木々などがない，広々とした空間．眼鏡をかけていたら，それもはずすこと．こうして準備が整ったら，その広々した平面のどこかに仰向けになって，じっと青一色の空を見つめてみよう．ところが，しばらく経つと，突然青色が崩壊するのである．灰色のような，気持ちの悪い状態になる．慌てて頭を横に振ると，突然周囲の景色が目に入り，さっと空の青色が復活するのである．私が最初にこの現象に気づいたのは，高校3年生のとき，珍しく日本晴れの日に，高校の近くの陸上競技場に寝っころがって，青空を見ていたときである．この現象は，色の認知が相対的なものであることを示している．また，我々が感覚している「色」は客観的な物体との対応関係があるわけではなく，脳の中の一連の情報処理によって感覚として把握されている，ということになる．

このような経験をしたこともあり，大学に入って生物学を学ぶにつれ，外界と認識の対応関係に興味を持っていった．これがどのような意味を持つのかについては，以下の文章を読んでいただきたい．少し長い引用だが，1997年に私が出した最初の単行本『遺伝子は35億年の夢を見る』[2)]のあとがきの最後の部分である．

> 本書において，私は遺伝子の進化という観点から「自分とは何か」という問題を考えてきた．しかしここでこれまでの論考をすべていったん否定しておきたい．目に飛び込んできた光が網膜に入り，それが神経細胞のネットワークで脳に伝えられるうちにさまざまな処理を受け，特定の視覚記憶と結びつくことによって認識が起こる．これに類する分析的・還元論的説明を，本書ではいろいろな箇所で繰り返してきた．しかし，いったいそれが何だというのか．この説明を受けても受けなくても，青い空の色はやはり青ではないか．自分という意識が主観的に把握するこのまぎれもない感覚は，これらのくだくだしい説明のすべてを，私自身のなかで撥ねのけるのだ．
>
> この，知識と実感のあいだを分かつ隔たりに，いずれは橋を架けること

> ができるのだろうか．両者がつながってはじめて，「自分とは何か」という謎が解かれるのであろう．

この本を発表してすぐあとに，私が「自分という意識が主観的に把握するこのまぎれもない感覚」と呼んでいた現象が，認知心理学では“qualia”と呼ばれていることを，ある本[3)]で知った．交通事故で頭部を打ったことにより，色の感覚を失った画家の話の最後に出てきた言葉なので，新しい言葉だったが，すぐ理解できた．私は一般論として，このような専門用語を原語の発音に近い片仮名で表して事足れりという風潮が嫌いなので，“qualia”に対して「絶対質感」という訳語を与えている[4)]．

私自身の体験を，もうひとつ説明したい．今度は偶然の体験ではなく，意図的に行った，ある種の心理訓練である．大学の学部時代に実際に何度か試みたものだ．それはいたって簡単なものだ．あぐらか座禅か何かの姿勢で座って，目を閉じるだけでよい．試みることは，頭の中で空間をいろいろな段階で想像する（私は「空間を張る」と呼んでいた）ことである．目を開けていれば，我々は立体視によって空間を把握することができる．また，夜空の星を眺めるときには，彼方の星がいかに遠方に位置するのかという知識をともにして，広大な宇宙空間をそれなりに想像することができる．目を閉じても，想像上の線を引き，遠近法の助けを借りて空間を張ることができる．このとき，一体どれだけの空間を最大で感じ取れるだろうか．測るわけにはいかず，主観的なものにとどまるが，私の場合，せいぜい前後左右それぞれ 10 km 程度だったろうか．想像できる空間の大きさには，個人差があるかもしれない．私はこの知覚を「最大空間知覚」と呼んでいる．

逆に，空間を張ることを，とことん否定する，ということも試みた．目を閉じても浮かべることのできる視覚像を消し去るのである．暗黒の中に自分を置くようなものだ．その場合でも，何らかの空間を感知することができるのである．こちらは「最小空間知覚」と呼んでいる．心理学の分野では，すでにそのような概念があるのかもしれないが，今までのところ聞いたことがない．

想像の視覚すら消し去っても残る空間感覚は，私の場合，自分の体を包む程度だった．そこから予想されるのは，この空間感覚が，体性感覚から来ている可能性である．この推論は，何人かの大脳生理学の専門家に話を聞いた結果である．すでに筋紡錘の働きに触れたが，自分が特定の座り方をしているために，その姿勢を維持している筋肉の張り具合の情報が，常に脳の体性感覚野に届いているはずだ．それらの情報が総合されて，視覚抜きでも空間をかろうじて張ることができるのかもしれない．ただし，この「最小空間知覚」体験のほうは，あまりおすすめしない．気持ち悪くなるからだ．外界を認識するための重要な設定である空間を積極的に否定しようとするために，脳中枢が抵抗するからではないかと考えている．一方，「最大空間知覚」は，気分が良くなる．人間がいかに視覚の動物であるかが理解できるような気がする．

今，「抵抗する」という擬人的表現を用いたが，これは，1 個体の中に複数の意

識が層をなしていることを前提としているからである．この連載の第 1 回[5]でもすでに触れたように，車の運転をしている間に別のことを考えていると，運転していたことを忘れてしまうことがある．けれども，運転は問題なくこなしているということがある．これは，注意の対象が複数あり，少なくとも視覚などの外界からの感覚とのやりとりをする脳の中枢と，それとは別の自分の内的世界でのことを考える脳の中枢は，並行可能だということである．

これにとどまらず，自意識自身も複数並立があり得るのではなかろうか．私は，特に酒に深く酔った場合だが，酔った自分と，それを冷ややかに見つめている覚めている自分，そしてその両者を比べている自分の，3 者が共存することがある．酒に酔った場合，脳の働きがかなり影響を受けるので，そのために，自意識も何らかの抑制がとれて，少し変化するのかもしれない．

酒に酔う場合と言えば，こんな体験もある．私は，言語活動が意識の存立に必須だとは考えていないが，話す言語を日本語から英語に，あるいはその逆方向に切り替えるには，少し意識を集中する必要がある．このためか，酒に酔ってたまたま英語を話していると，そのあとすぐに日本語での会話に切り替えようとしても，簡単に切り替わらないことがある．これは，酔ったために意識の作用に何らかの変化が生じたためではないかと思っている．

このような意識の多元性，あるいは階層性は，意識のない状態，すなわち無意識にも存在する可能性が高い．人間に限らず，脊椎動物の脳はほぼ基本構造が同じであるが，よく知られているように，それぞれの部分の相対的大きさはかなり違いがある．哺乳類は一般的に大脳が大きく，霊長類，特に人間でそれは顕著である．言語活動を初めとする多様な意識的活動は，これら大脳皮質が深く関わっている．最近は，「機能的核磁気共鳴法」などの新しい技術によって，脳のどの部分がどのような特定の思考機能を担っているのかが，かなりよくわかるようになってきている[6]．まだ人間以外の動物の研究は限られているようだが，将来人間と他の動物との脳機能の共通性がわかるとおもしろいだろう．

再びフロイトが登場するが，彼は意識と無意識の中間に，「前意識」という状態を提唱したそうである[7]．このような階層性はしかし，すでに仏教思想でマナ識（意識の直下）やアーラヤ識（マナ識より下層の，真の無意識）という名称で知られていた．また，仏教の始祖，釈尊は階層性のある瞑想を経て悟りの境地に入ったことでも知られており，彼が入滅する際にも，この瞑想を行っている[8]．順序としては，初禅，第二禅，第三禅，第四禅，空無辺処定，識無辺処定，無所有処定，非想非非想定，滅想受定の 9 段階である．おもしろいのは，最深の滅想受定に到達したあと，逆の順をたどって初禅まで戻っている点である．そしてまた瞑想の段階を深め，第四禅からただちに「完きニルヴァーナ」に入った．すなわちこの時点が釈尊の肉体的死となる．スリランカなどの小乗仏教では現在もこのような瞑想の修行が行われているそうである．これら瞑想の多層段階は，古代インドの思想家，宗教家が，人間の意識・無意識にいくつもの段階があると考えていたことを示しているのかもしれない．これらの段階において脳中枢がどのような活動をしているのか，現代生物学で研究が進めばお

もしろいなと思っている．

本稿を結ぶにあたって，最後に「言語」の問題を取り上げたい．言語活動は人間の意識的活動のかなりの部分を占めるが，知的活動のすべてではない．我々は，意識にのぼらない無意識世界で膨大な知的活動をしているのである．言語は人間だけが有する能力だが，知的活動は，定義にもよるが，多くの動物が持っている．論理的思考は必ず言語を通して生じるという考え方があるようだが，私にとってはそれは間違いである．もっとも，ここでも定義の問題があり，何を「論理」と考えるのかによるかもしれない．すべての論理は数学的に記述することができるとしよう．一方で数学は自然言語の一部である．すると，論理は言語活動の一部だということになるのだろうか．このような思考方法は，生物進化という時間の流れを無視したものである．論理がすべて数学的に記述できるからといって，数学を扱える人間だけが論理をもて遊べるというわけではない．イヌだって，何らかの論理的行動をしているのは明白だろう．

言語能力は，霊長類の中でも脳の発達によりとりわけ高い知的活動をできるようになった，ヒトの系統で生じた．言語の発生と発達には，もちろん遺伝的な要素がある．でなかったら，人間誰もが潜在的な言語能力を持つことを説明できないからだ．言語能力の遺伝的基礎について，詳しくは文献 9) を参照されたい．文献 9) ではまた，言語学で通常前提とされる「意味と発音の関連は恣意的にすぎない」という考え方に疑問を呈している．Ramachandran[10] も，言語の起源にさかのぼれば発音と意味が相関していたという考え方を表明している．さらに，文献 9) において，私は手や顔による意思疎通と複雑な音声の発声の間に何らかの関係があったのではないかと示唆したが，Ramachandran[10] も，手の指の動きと頭の顎の動きに相関があることを，なんとチャールズ・ダーウィンがすでに気づいていたことを指摘しつつ，大脳皮質でこれらの運動を制御する異なる領域間に，何らかのつながりが言語の誕生以前から存在していたと推測している．これらのつながりから音声言語が誕生したという仮説である．

言語の原初形態が何だったのかについては，様々な考え方があると思うが，情報伝達という観点からすると，よく言われるのは，集団で生活しているときに，他の個体との意思疎通をより円滑に行うために音声言語が誕生したという考え方である．そうだとすれば，人称代名詞や指示代名詞がもっとも古い単語だということになるのかもしれない．私は疑問である．すべての思考には，情動がつきまとっているはずだ．すべての感覚に情動がくっついているように．そうであれば，最古層の単語ほど，より強い情動をもたらすのではあるまいか．言語活動の中で，もっとも我々の心に訴えるものは何だろうか．それは歌であり，詩だと思う．単語で言えば，自分の記憶と結びついている具体的な現象だ．例えば「やま」と発音したとたんに，これまでの人生で蓄えてきた自分の記憶の中から，山に関する記憶が連想されて湧き上がり，そこから複雑な情動が呼び起こされるではないか．これこそが，言葉のちからである．

もっとも，この段階ではまだシンボルにとどまっており，単語が組み合わされて文法が誕生しなければ，真性言語とは言えない．文法構造の本質は，組み

合わせ爆発である．有限数の単語の組み合わせにより，事実上無限とも言える文を創り上げることができる．この論理を理解して初めて，人間の先祖は真性言語を獲得した．組み合わせ爆発を理解することは，自意識の深化や，心の理論[11)]の獲得にもつながっている可能性がある．おそらくこの新しい認識システムは，自己言及と関連しているだろう．自己言及という論理を「理解」できるニューロン回路を発生させる遺伝子の変化が，人類進化上で極めて重要だったのではなかろうか．

自己言及が可能になることによって，我々は「無限」を理解してしまった．しかしそれによって，自己の世界が有限であることに恐怖し，また無限に対して恐怖する，人間というおかしな動物が誕生してしまったのである．

参考文献

1) 斎藤成也，神経中枢としての脳の進化，連載「ゲノム進化学の展開」第 14 回，数理科学，44 巻 3 号，72–76 頁 (2006).
2) 斎藤成也『遺伝子は 35 億年の夢を見る—バクテリアからヒトの進化まで—』大和書房 (1997).
3) Sacks O. “An Anthropologist on Mars” Vintage Books (1995); 吉田利子訳『火星の人類学者』ハヤカワ・ノンフィクション文庫，早川書房 (2001).
4) 斎藤成也『ゲノムと進化—ゲノムから立ち昇る生命—』新曜社 (2004).
5) 斎藤成也，連載を始めるにあたって，連載「ゲノム進化学の展開」第 1 回．数理科学，42 巻 7 号，64–70 頁 (2004).
6) 定藤規弘，外側から脳を調べる，井原康夫編『脳はどこまでわかったか』朝日選書，101–114 頁 (2005).
7) 下條信輔『〈意識〉とは何だろう』講談社現代新書 (1999).
8) 中村　元訳『ブッダ最後の旅—大パリニッバーナ経—』岩波文庫 (1980).
9) 斎藤成也，言語能力の遺伝的基礎，大航海，52 号，114–121 頁 (2004).
10) Ramachandran, V. S. “A Brief Tour of Human Consciousness” Pi Press (2004); 山下篤子訳『脳の中の幽霊—ふたたび 見えてきた心のしくみ—』角川書店 (2005).
11) Premack D. & Premack A. 著，長谷川寿一監修，鈴木光太郎訳『心の発生と進化』新曜社 (2005).

（さいとう・なるや，国立遺伝学研究所）

角谷静夫先生を偲んで

池田　信行



1997 年，Yale 大学の研究室にて（伊藤雄二氏提供）．

1. はじめに

近代的な確率論や，エルゴード理論，および関数解析学の日本における研究の草分けの一人である角谷静夫先生が 2004 年 8 月 17 日に逝去された．先生が数学の研究に進まれるまでのことやアメリカでの研究生活については，先生を最も良く知る一人である伊藤雄二氏（[1], [2]）により，既に詳しく紹介されている．ここでは幾つかの資料をたよりに，伊藤氏による紹介とできるだけ重複をさけて，確率論をめぐることや先生が大阪大学におられた頃のことを中心に話を進める．

先生は 1911 年の生まれで，東北大学数学科に入学されたのが 1931 年で卒業されたのが 1934 年である．先生が数学の道に進まれたのは，卒業後大阪で研究生活を共にされる，南雲道夫先生（1906 年生まれ）や吉田耕作先生（1909 年生まれ）よりやや遅いが，解析学が現代的な様相をおびる転換点からそれほど間がない時期である．これからの話に出てくる E. Hopf, A.N. Kolmogorov や J. von Neumann は先生より少し年長で 20 世紀初頭の生まれである．

2. 東北大学時代

先生は東北大学数学科の 3 年生（最終学年）のセミナーでは岡田良知教授の下で関数論を学ばれた．その頃，ある程度の規模の数学科を持つ日本の国立大学は東京大学，京都大学，東北大学，北海道大学等であった．（当時は帝国大学と呼ばれたが，簡単のため，ここでは現在風の呼び方にする．）東北大学に進まれた事情については伊藤雄二 [1] を初め多くのところで紹介されている．今では想像し難いかもしれないが，当時は個々の大学は相当に運営の自由を持ち，それぞれ個性を持っていた．中でも東北大学は，沢柳総長の決断で，高等学校（旧制）の卒業生だけでなく，広く門戸を開放していた．数学科でも高等学校理科の出身者以外にも，早くからいろいろな経歴の学生を受け入れていて，その中には陳建功，蘇方青等の中国からの留学生の名前も見られる．また多くの女子学生を受け入れている．このようなことは現在はどこでも見られるが，当時としては画期的なことであった．このような東北大学の開放的な方針が甲南高等学校（旧制）の文科の卒業生である先生に数学への道を提供した．

数学の世界に目を転じると，現在の日本数学会と日本物理学会の前身である日本数学物理学会の年次総会はそれまでは毎年東京大学で開かれていたが，1929 年に初めて東北大学で開催された．交通がそれほど便利でなく，通信手段が限られていた当時は，日本の各地の数学者の間の交流も頻繁には行われていなかったと思われる．このような事情は，各々の数学教室が個性に富んだ特徴ある姿になることに，創立期の人たちの見識とともに，影響していた．東北大学で先生と同世代の人としては，2 学年上に双対定理初め数多くの成果で有名な淡中忠郎，1 学年上に興味が Fourier 解析，確率論から応用数学にまで及んだ河田龍夫，1 学年下には関数解析の研究を目指した深宮正範の名前がある．東北大学は，1930 年の前半の頃は，泉　信一（1904 年生まれ）を中心とする Fourier 解析の研究でも知られるようになっていた（佐々木重夫 [3]）．

先生はこのように研究意欲に燃えた同世代の人たちの中で学生生活を送られた．また当時出版されたばかりのBanachの本に興味を示し，萌芽期の関数解析に関心を持っておられたと伝えられている．

3. 大阪大学時代

卒業と同時に，その直前に出身地大阪に創立された大阪大学の数学科の大学院に移り，翌1935年に助手になられた．伊藤雄二 [1] では最初から助手であったように読める感じの文章になっているが，吉田先生の思い出でも，大阪大学数学教室の同窓会名簿でも35年から助手となっている．ただ南雲先生の話等から推察すると，大学院と言っても現在のものとは大いに違い先生は他の先生方々と同様に初めから研究スタッフの一員であったと思われる．

大阪大学の設立予算が認められたのは1931年で，同年の5月1日に理学部が，数学，物理，化学の3学科で誕生し，1933年から学部学生の募集が始まった．なお設立準備委員の中に数学関係者として東京大学の高木貞治教授が含まれている．先生が大阪大学に来られたときの教授は清水辰二郎先生（1897年生まれ），と正田建次郎先生（1902年生まれ）の2人で，やがて南雲先生と寺坂英孝先生（1904年生まれ）が教授になられる．大阪大学数学教室の同窓会名簿を見ると解析関係の研究者としては，たとえば三村征雄（1904年生まれ），池原止戈夫（1904年生まれ），吉田耕作や北川敏男（1909年生まれ）等の名前がある．清水先生はやや年長であるが，当時正田先生始め皆が30歳代前半か20歳代で，多くの方は先生にとっては同世代とも言える程若い研究者ばかりである．これら若い研究者を中心にした研究の雰囲気は，1935年中国を訪問する途中で大阪大学を訪ねたN. Wiener（当時40歳）に極めて好印象を与えたことが彼の自伝に吉田，角谷の名前をあげて述べられている（[5], 184頁）．

先生は，大阪でも，初め有理型関数の研究を清水，吉田両先生等と続けられ，成果は1937年の *Japanese Journal of Mathematics* に発表され，学位論文（1941年）になっている．1940年に，正田先生の尽力で，Weylに招かれPrincetonの高等学術研究所に留学されるが，それまでの約6年間に研究領域を急速に広げられた．ちなみにPrincetonの高等研究所に招かれた日本の数学者としては，当時大阪大学の助教授であった中山　正先生についで2人目である．この頃吉田，北川両先生たちと1937年に出版されたE. HopfのErgodentheorieやP. LévyのThéorie de l'addition des variables aléatoiresを読まれたと伝えられている（[1]）．

南雲先生が雑談で，当時の大阪大学の雰囲気について話をされたことがある．不覚にもこの話に出てくる時期を正確に聞かなかったので確かにこの時期の話とは言えないが，種々の事情からこの頃のことと思われる．教室の多くの人が *Annals of Mathematics* に注目していて，新しい号が到着すると先生は全部の論文に目を通し，その日の中に，そこに出ている論文に関連して考えられる問題を他の先生方と終日話しておられたとのことである．それだけに留まらず翌日はその中のいくつかについては肯定的な解答を，あるものには反例を用意して議論を続けられたとのことである．先生がすばやく反例を作られることは有名で，岡田教授のセミナーでもほとんど即座に反例を挙げて質問に答えられていたと伝えられている（河田龍夫：[3] の付録）．また吉田耕作 [4] には，セミナーで議論が紛糾すると，先生が10分もかからないくらいで反例を作り話を前に進められたことが書かれている．

先生が「全国紙上数学談話会」誌に投稿されている多様な話題を見ると興味の広がりと研究の様子を知ることができる．なおこの小冊子は謄写版刷りのもので，1934年6月から始まり経済的な理由で1949年9月に終わるまで，日本全国の数学者の数少ない研究交流の場になっていた．鉄筆で手書するもので，発行責任者の清水先生に，南雲先生を中心に多くの大阪大学の先生方が協力しておられたと聞く．

4. Nobel賞をめぐる話

先生は1930年代の終わり頃から不動点の研究に興味を持っておられたと思える．たとえば1938年の学士院記事に一つの成果が報告されている．数学の枠を超えて，経済学やゲームの理論の研究者の中で最も良く知られている不動点に関する先生の成果は，1941年に *Duke Math. J.* に発表された "A generalization of Brouwer's fixed point theorem" と題する論文である．いま簡単な例を示すために閉区間 $[0,1]$ 上に定義され，$[0,1]$ の値をとる連続関数 f を考える．そのと

き，連続関数 $F(x) = f(x) - x$ に対し中間値定理を応用すれば，$x^* \in [0,1]$ で $x^* = f(x^*)$ となる点，すなわち f の不動点，が存在することが分かる．もっと一般に高次元のときは，次の Brouwer の不動点定理が成り立つ；S を n 次元ユークリッド空間の有界閉凸集合とするとき，S から S への連続関数は不動点を持つ（*Math. Ann.* **69** (1910)）．これに対して，角谷の不動点定理は，S の上に定義され，S の空でない閉凸部分集合の値をとる写像が，ある種の連続性（上半連続性），をみたせば，不動点を持つことを主張している．先生の論文の序文に述べられているように，この結果から von Neumann がゲームの理論や数理経済学との関連で考えた不動点定理を導くことができる．

1950 年頃，ゲームの理論や急速に数学的形式を整えていた経済学では Brouwer や角谷の不動点定理がしばしば重要な役割を果たしていた．たとえば，K.J. Arrow と G. Debre Debreu は 1954 年に角谷の不動点定理を用いて，経済のある種の体系で一般均衡解が存在することを示した．彼等は 1972 年の Nobel 経済学賞の受賞者である．また個性豊かな数学者である J.F. Nash は 1950 年に Nash 平衡と呼ばれる性質の存在を示したが，彼の当初の証明では角谷の不動点定理が鍵になっている．この業績が基になり，Nash は 1990 年の Nobel 経済学賞を受賞した．

話は少し横道にそれるが，上の例と同様に，幾つかの Nobel 賞ではその根底で数学の理論が決定的な役割を果たしている．たとえば，A.M. Cormack と G.N. Hounsfield が受賞した 1979 年の Nobel 医学・生理学賞：「コンピュータを用いる X 線断層撮影技術の開発」の背後で決定的な役割を果たしているのは，1917 年の Radon の論文に現れる Radon 変換である．なお Cormack は，彼自身の話によれば，医学に関する話の必要性から問題を考え，周辺の数学者に関連する数学の結果を聞いたが誰も知らなくて，自ら工夫して関連の技術を確立した．彼が Radon の論文を知ったのはそれから 15 年後である．Hounsfield も独自に同様な技術を確立した．G.D. Birkoff が "直線で絵を画く" ことについて *J. de Math.* (Liouville), **19** (1940) に発表した論文に関する話が吉沢尚明：Radon 変換（笠原乾吉，杉浦光夫編：20 世紀の数学）に紹介されている．その解説によれば，この論文は Radon 変換の通常の文献表には出て来ないが，内容的には Radon の論文の第一部分とよく似ている．この論文には引用文献はなく，Birkoff 自身が独自に考えたものと思われる．吉沢先生はこの論文のことを 1945 年大阪大学の学生時代に雑談の中で先生から聞かれたそうである．当時大阪大学の図書室では *J. de Math.* (Liouville) を見ることはできなかったそうで，角谷先生がこの論文を何処で知られたかは吉沢先生の解説には書かれていない．しかし，この話は先生が非常に広い範囲の話題に目配りされていたことを示す一つの証と見れる．

1973 年の F. Black と Scholes の論文に始まり，この 2 人と Merton の 3 人を中心に発展してきた成果に対し，M. Scholes と R. Merton は共同で 1997 年の Nobel 経済学賞：「デリバティブの価値を決める新しい方法の開発」を受賞した，（Black は 1995 年に癌のため他界した）．この理論は，彼等自身が述べているように，確率解析により支えられている．なお確率解析は，最初に Wiener により基礎が確立され，Lévy の考えを発展させた伊藤清先生の「全国紙上数学談話会」誌 (1942)，に発表された論文で理論の骨格が築かれた．

なお「全国紙上数学談話会」誌を通じて全国的な研究交流を始めた世代の数学者たちの中から，国際的に活躍する人が数多く現れたことは良く知られている．そのことと併せて，それらの中から上に述べた成果のように数学以外の分野にも深く関わる成果が生まれたことは興味深い．

5. "流れ" と Brown 運動をめぐって

1940 年頃 Princeton には M. Ambrose, D. Blackwell, J. Doob, P. Erdös, P. Halmos, G. Mackey, I. Segal 等がいて活発な研究を行っていた (伊藤雄二 [1])．Doob は先生より 1 歳年上であるが，残りの人はより若く，最も若い Blackwell が 8 歳年少である．彼等の中の多くがその後の確率論やエルゴード理論の発展に深く関わっている．確率論は，20 世紀の初頭はフランスを初めとするヨーロッパやロシアの人たちを中心にして発展していた．1920 年代の前半になり，これらの地から遠く離れ，確率論の研究についての伝統に乏しいアメリカで Wiener が Brown 粒子の運動の模型を数学の枠組みの中で確立し，J. Perrin が精密な実験結果から予測した軌跡の性質をこの枠組みの中で示した頃より確率論の研究風景は様変わりする．Wiener の

成果は，ロシアにおける1930年前後のKolmogorovたちの成果とともに，確率論が数学に欠くことのできない課題であることを示した．この流れは1934年に出版されたR.E.A.C. PaleyとWienerの共同の本でFourier展開によるBrown運動の軌跡の構成が示され一層加速する．Doobは，初めは先生と同様に関数論の課題に興味を示していたが，1937年にKolmogorovの公理系から出発して連続時間の運動を数学の枠組みで考察するときに現れる困難を解消するための成果を発表している．さらに1940年代になるとアメリカをはじめ世界の各地で，Wienerの次の世代の人たちが次々と確率論で成果をあげて行く．先生がPrincetonに行かれたのは，そのような時代が始まる前夜である．その頃，1937年のLévyの本が確率論に次の飛躍をもたらすのではないかと考えた人々が世界の各地に居たようである．実際，先に述べたように大阪では先生たちがこの本に取り組んでおられ，東京では伊藤清先生が単独でこの本と苦闘しておられた．また，「全国紙上数学談話会」誌205号に紹介されている，先生から吉田先生への手紙には，アメリカでもこの本が話題になっていたようでAmbroseとHalmosがLévyの本は難しいと言っている話が出て来る．また，鐘開莱(K.L. Chung)は，Lévyの生誕100周年記念シンポジウムの折に，天津から重慶に疎開していた南開大学の図書がある時期，日本軍の爆撃を避けるために，地下倉庫に保管されていたためにこの本を見ることができなかったことの無念さについて率直な話をした（シンポジウムの報告集にある彼の報告の脚注参照）．

なおPrincetonから吉田先生宛ての手紙には（当時20歳代後半の）先生が「全国紙上数学談話会」誌と言う手作りの小冊子を見せながらvon Neumannと話される模様とか，S. Bochnerとの話とか，Princetonの当時の研究の様子等が出て来て大変興味深い．

PrincetonではWeylやvon Neumannのセミナー等への参加やそこに集う若い研究者たちとの交流を通して，この上ない研究環境に恵まれ次々に成果を得ておられた先生であるが，1941年12月に始まった太平洋戦争のために諸々の事情が生じ，42年の夏，最後の交換船で帰国された．その後は再び大阪大学を拠点として研究を続けられる（先生は1940年6月から大阪大学助教授）．この頃は戦争が次第に激しくなり，研究の社会的な環境は悪くなる一方で，1944年には大阪大学の数学教室そのものが滋賀県の彦根さらに豊郷に疎開した．それにも関わらず，この間に先生はその後の発展にとって鍵になるような成果を数多く発表しておられる．

先生は早くからMarkov過程のエルゴード性について吉田先生と協力して研究しておられたが，Ambroseはエルゴード理論についてそれらとやや違った方向の研究を始めていた．確率空間上の保測変換の族$\{T_t; t \in R^1\}$は，すべての$t, s \in R^1$に対し$T_t T_t = T_{t+s}$が成り立ち，さらにある種の可測性をみたすとき，“流れ”(flow)と呼ばれる．Ambroseは1940年頃“流れ”の表現の問題に取り組んでいたが，先生はAmbroseと共同でそれらを発展させ“流れ”の構造解析に基本的な役割を果たす成果を得られた．さらに帰国後発表された学士院記事の論文では，変換から導かれるinduced変換の性質が解明されていて，ここで導入された変換の間の同値関係は「角谷同値」と呼ばれ，“流れ”の研究で広く用いられている（伊藤雄二[1], [2]）．この時期の先生たちの成果は，吉沢先生の言葉を借りれば，エルゴード定理の研究からエルゴード理論の研究へ進む一つの流れを示している．

またこの頃，先生はBrown運動の軌跡の挙動について精力的に研究され，それらの成果が1944年の日本学士院記事に出ている．Brown運動の軌跡が各点で微分不可能な連続関数であること等はWienerの段階で既に示されていて，さらにLévyの本で軌跡の挙動の解明は一層発展させられている．いま独立なn個の1次元Brown運動の組を考えると軌跡がn次元のユークリッド空間を動くn次元Brown運動が得られる．それまで多くの研究が1次元または2次元のBrown運動に注目していたのに対し，先生は一般次元の場合を考え，軌跡の挙動で次元数nが基本的な役割を果たす性質に注目しておられる．たとえば，$n \geq 3$ならば，時間が無限に経過した後には軌跡は無限遠に遠ざかることが示されている．したがって$n \geq 3$のときはBrown運動は非再帰的である．実は$n \leq 2$ならばBrown運動は再帰的である．すなわち，出発点を中心とする2つの円（1次元のときは区間），を任意に考えれば，大きいな円（区間），を出て再び小さい円（区間），に帰る事象が無限回起こる確率は1である．したがって$n = 2$と$n = 3$で事情が本質的に変わる．この事実はG. Pólyaが1921年に示した，対称なランダム・

ウォーク（酔歩）の性質に対応している．

また同じ論文で $n \geq 5$ ならば確率 1 で軌跡は 2 重点を持たないことが示されている．実は $n = 2$ のときは確率 1 で軌跡は 2 重点を持つことが Lévy により 1940 年に示されている．残るのは $n = 3, 4$ の場合であるが，そのことについては先生は，再び渡米された後に A. Dvoretzky や Erdös たちと協力して解決しておられる．n 次元 Brown 運動の軌跡は，$n = 3$ のときは 2 重点を持ち，$n = 4$ のときは 2 重点を持たない．これらの成果は，Lévy が志向した Brown 運動の軌跡の性質の解明が多様な方向に展開を始める出発点になった．

ほぼ同じ時期に，ニュートン・ポテンシャル論の話はすべて Wiener 空間（連続関数の空間に Brown 運動に対応する確率測度が定義された空間），に引き上げて論ずることができること，すなわち Brown 運動の軌跡の挙動として表現できることが先生により示されている．実際は $n = 2$ の場合を詳細に論じてあるが，ここで用いられた議論の基礎になる考え方は一般の次元の場合に適用できるものである．この考え方の出発点になるのは次の事実である．2 次元空間の領域 D の境界 ∂D の部分集合 E を考える．D と E が適当な条件をみたせば，D に含まれない任意の点 x と領域 D に関する E の調和測度 $h(x, E)$ は x から出発した Brown 運動の軌跡が最初に境界 ∂D に到達する時刻 σ における軌跡の位置が集合 E に含まれる確率に等しい．なお先に述べた 2 重点の問題の一般的な解決にはニュートン・ポテンシャル論における容量の概念をこの立場から理解することが有効な働きをする．

ニュートン・ポテンシャル論に対するこのような視点は Doob のマルチンゲールを用いる考えと結びつき，一般の Markov 過程の場合に広げられ，1950 年代から 1960 年代にかけて確率論と解析の多くの課題にまたがる大きな話題として注目される．そのような流れを受けて，1967 年の 5 月初旬にアメリカで Markov Processes and Potentials と言う標題のシンポジウムが開かれた．先生は出席しておられなかったが，このシンポジウムの最初の講演で，M. Kac が座長として，このような会合ではやや異例と思えるほど，長めの話をして会場が大笑いになったことがある．私の英語の理解力では皆がなぜ笑いこけるのか分からなかったので隣の席にいたアメリカの友人に聞くと，Kac は「このような偉大な標題のシンポジウムはこれを最後にしたいので，角谷や Doob からどれだけ進んだのかをきちんと議論しよう」という意味の話をしているとのことであった．Kac は辛辣だが興味深い話をする人として知られているので，実際はもっと意味深い話をしていたかも知れないが，そのことはさておいて，そのとき先生の成果の重要さについて改めて考えさせられたことが今も忘れられない．

なお 1940 年代の中頃は，Wiener がいたアメリカがそうであったように，日本でも Brown 運動を中心とする確率論についての話は，広く解析に興味を持つ人々の話題になっていたようで，たとえば谷口財団の特定研究者助成の一覧には 1944–45 年度として南雲道夫・角谷静夫「確率論の基礎および応用に関する研究」と言う標題が出ている．

6. 諸々の話

先生が Princeton から大阪に帰られた頃は，大阪大学の事情も変りつつあった．かって Lévy の本を一緒に読まれた北川先生は 1930 年代の終わりに九州大学に移られた．吉田先生も間もなく新設の名古屋大学の教授として移られる．一方先生の指導で研究の道に進む卒業生が現れる．ここで取り上げた話題に近い分野に興味を持つ人として，たとえば国沢清典（1939 年卒），安西広忠（1942 年卒），吉沢尚明（1945 年卒）等の名前が知られている．特に安西先生の成果の中には先生の“流れ”の研究に密接につながるものが含まれている．また先生は大阪大学に来られて間もなくの頃，位相群に関する成果を発表しておられるが，戦争の末期から戦後の早い時期に先生の指導を受けた人たちの中の何人か（安西，吉沢，村上信吾等），が位相群の研究を行っている（大阪大学 50 年史（部局史））．

さらに先生は当時の日本の研究者の成果にも強い関心を持ち交流しておられた．たとえば伊藤清先生の論文選集の序文には，Princeton から帰られた頃の，エルゴード理論や non-abelian group 上の正定値関数や，Brown 運動と調和関数の関係についての先生の話に大変興味を覚えられたことが記されている．さらに今日 Wiener–Itô 分解として知られる Wiener 空間上の 2 乗可積分な関数の空間の多重 Wiener 積分を用いる直交分解は，エルゴード理論についての先生の話や丸山



1998 年，角谷先生の Yale 大学での 50 周年を記念する会にて（伊藤雄二氏提供）.

儀四郎先生の定常 Gauss 過程のエルゴード性の研究に動機づけられたことが述べられている．また先生自身が，アメリカに再び渡った後に，Brown 運動から導かれる "流れ" を論じた論文や定常 Gauss 過程のスペクトルについての論文で，同様な分解を，Wiener の考えにそって，Hermite 多項式の視点から論じておられる．これらの話は当時の先生と大阪以外の数学者の交流の一例である．なお Brown 運動から導かれる "流れ" については安西先生の成果も同じ頃発表されている．先生がもたらされたアメリカにおける数学の研究についての情報は，先生自身の成果の話とともに，国際的な交流の道を殆ど閉ざされていた当時の日本の数学者に非常に大きな影響を与えたと思われる．これは戦後の話であるが，当時を知る人に最近聞いた話では，その頃大阪以外では "角谷詣で" と言う言葉があり，先生を訪ねて話を聞いたり，アメリカの友人から先生宛てに個人的に送られて来ていた，*Annals of Mathematics* を見せて貰っていたとのことである．

先生は 1948 年再び渡米され，上に述べた直交分解の話等はその後に発表されているが，それ以後研究の足場はアメリカにおかれ，1969 年と 1970 年の短期間を除いて日本を訪問されることはなかった．アメリカでの先生の活躍については，伊藤雄二 [1], [2] に詳しく紹介されている．

話は数学そのものから離れるが，先生が Princeton から帰られた頃，「いまに，日本は焼野原になるから勉強用の原稿用紙を買いだめとかないと，そのうちに困ります….」と言っておられたことを吉田先生が書かれている（[3]）．驚いたことに実際大量の紙が購入されていた．1960 年代の中頃大阪大学の数学教室は中之島の校舎から現在の豊中の校舎へ引越した．その作業の責任者をしていた私は，あるとき図書の仕事を担当していた松浪尭史氏に図書室の奥に案内され「角谷先生の紙のことを考えて欲しい」と言われ，膨大な量の紙を見せられた．それらは，当時のアメリカでは普通であったのかも知れないが，戦争末期の日本であまり見かけなかったであろうと思われるような立派なもので，そのような高級紙をどうするか容易に判断できることではなかった．大阪大学に来て間もない私には，どうしてこれらの紙がこのような形で残っているのかの事情はわからなかったが，松浪氏は先生は大事にしておられたので無断では処理できないだろうとの意見であった．一方私は先生から手紙の返事を貰うのは大変難しいことを聞いていたので，どうしたら良いかすぐにはわからなかった．何回か手紙で連絡したり，吉沢先生に相談したりしたが結局先生の意見が聞けないままに，教室の希望者に分けることにした．それから数年後に先生が日本を訪ねられた折り，大阪から京都までご一緒したことがあり，その際にあの紙はどうしたかと聞かれたので経過を説明したところ，話は「そうか」と言うことで終わった．しかし，なんとなく「池田は何にも分かっていないな」と言っておられるような雰囲気であった．今考えると，私は戦争末期のことを多少知っているので，当時の状況を考えない早まった処理をしてしまった気がしている．なおこの紙をどのようにして入手したかについては二三の人に話を聞いた記憶があるが，今となっては確かめようがない．

参考文献

[1] 伊藤雄二：角谷先生を偲んで，日本数学会の数学通信 **9** 巻 3 号.
[2] 伊藤雄二：角谷静夫の数学，数学セミナー 2005 年 1 月号.
[3] 佐々木重夫：「東北大学の数学教室の歴史」.
[4] 吉田耕作：角谷静夫氏，数学セミナー 1966 年 9 月号.
[5] N. Wiener: I am a Mathematician.

（いけだ・のぶゆき，大阪大学名誉教授）

編集後記

今冬は例年に比べ寒いが，立春も過ぎ晴天の日が多いここ東京では，日に日に陽光の輝きが増していて，自然と気分も明るくなる．

今月号の特集では「空間」をとり上げた．中国戦国時代（前300年頃）の楚の詩人，屈原の詩「天問」に，天地開闢についての疑問を天に問う節がある（特に初めの二節）．これを「空間」についての問いでもあると強引に解釈するならば，「空間」とは何かについてはかなり古くから考えられてきたのだといえるかもしれない．（一方で，2300年という年月は人類の歴史からすると決して長いものではないともいえるが．）　（平勢）

＊　　＊

本号で，連載「ゲノム進化学の展開」が終了しました．約2年にわたる連載でしたが如何でしたでしょうか？

ヒトのDNAの長さは2mもあるそうですが，それが直径0.01mm程の細胞核に綺麗に織り込まれていると言います．

作家の池波正太郎さんの小説に「何事も小から大へひろがる．小を見捨てて大が成ろうか」という台詞があるのですが，まさに0.01mmのミクロな空間に，宇宙も映し出す不思議な理が存在するんだなあと感心します．一事が万事と言いますが，改めて当り前の事こそ見過ごせないなあと思う今日この頃です．　（伊崎）

数　理　科　学　4月号

2006年4月1日発行　　発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ

(The Library for **S**enior & **G**raduate **C**ourses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野**および**諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．

装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

表示価格はすべて税抜きです

1 **カオスと量子物理学**
中村勝弘著　本体 1857 円

3 **シュレーディンガー方程式**
仲滋文著　本体 1790 円

4 **量子コンピュータの基礎**
細谷暁夫著　本体 1857 円

5 **有限体と符号理論**
内田興二著　本体 1667 円

8 **差分方程式講義**
広田良吾著　本体 1857 円

9 **生命をつくる**
中野馨著　本体 1524 円

10 **計算物理入門**
上田顯著　本体 1381 円

11 **エコノミックゲームセオリー**
船木由喜彦著　本体 1429 円

12 **演習 場の量子論**
柏太郎著　本体 1886 円

13 **複雑系脳理論**
津田一郎著　本体 1429 円

16 **有限要素法による構造解析事例集**
白鳥正樹・三好俊郎編著
本体 1429 円

17 **基礎からの力学系**
小室元政著　本体 1886 円

18 **独立成分分析**
甘利俊一・村田昇 共編著
本体 1667 円

20 **物理数学ノート**
佐藤光著　本体 1819 円

21 **数学の未解決問題**
上野健爾・高橋陽一郎・中島啓共編
本体 1886 円

23 **微分幾何講義**
二木昭人著　本体 1857 円

24 **脳の謎に挑む**
茂木健一郎編著　本体 1829 円

25 **量子場脳理論入門**
高橋康監修・保江邦夫著
本体 1876 円

26 **脳型コンピュータの実現に向けて**
甘利俊一編著　本体 1857 円

27 **ガロア理論**
中野伸著　本体 1790 円

28 **量子可積分系入門**
白石潤一著　本体 1876 円

29 **伝えるための理工系英語**
宮野健次郎著　本体 1429 円

30 **応用のための関数解析**
吉田善章著　本体 1800 円

31 **分子コンピュータの現状と展望**
萩谷昌己編著　本体 1524 円

32 **量子情報理論入門**
林正人著　本体 1886 円

33 **工学のための非線形解析入門**
藪野浩司著　本体 1857 円

34 **経済における確率的モデルへの招待**
青木正直著／青山秀明・藤原義久監訳
本体 1886 円

35 **賭けの数理と金融工学**
竹内啓著　本体 1429 円

36 **応用のための確率論・確率過程**
松本裕行著　本体 1876 円

37 **情報理論の基礎**
村田昇著　本体 1619 円

38 **複素ニューラルネットワーク**
廣瀬明著　本体 1695 円

39 **マクスウェル方程式**
北野正雄著　本体 1876 円

40 **制御理論講義**
木村英紀著　本体 1886 円

41 **バイオインフォマティクスの基礎**
冨田勝監修・斎藤輪太郎著
本体 1857 円

42 **トポロジー入門**
田中利史・村上斉共著　本体 1886 円

43 **アルゴリズムと計算量**
谷聖一著　本体 1857 円

44 **ゲーム理論のフロンティア**
池上高志・松田裕之 共編著
本体 1829 円

45 **ゲージ場の量子論入門**
近藤慶一著　本体 1886 円

のご案内

工学のための
無機材料科学
山下・片山・大倉・橋本 共著
A5／約220頁／予価2000円

本書は，セラミックス科学の基礎知識としての熱力学，結晶構造にはじまり，電導性，誘電性などの各性質，熱分析，X線回折，表面解析などの解析方法，さらにセメント，陶磁器，ガラスなどそれぞれのセラミックスの製造法を学ぶ．

細胞の運命 I 真核細胞
山田正篤 著
A5／240頁／本体2100円

生物の基本単位である細胞の構造と機能の面から，動物細胞とくに多細胞性真核生物であるヒトの細胞を中心に，そして医学との繋がりについて解説．また真核細胞研究のための実験技術としての組織培養に関しても詳述．

酵母のライフサイクル
菊池韶彦 著
A5／152頁／本体1700円

酵母に関する素朴な疑問から，その遺伝子，増殖やライフサイクルなどの酵母研究の方法を学ぶ．酵母や細菌の研究の歴史，遺伝子操作，ゲノム研究の歴史などの解説を通して，遺伝学の基礎も身近なものとなるだろう．

コンパイラ
徳田雄洋 著
A5／約200頁／予価1800円

本書では，コンパイラの記述法，簡単なコンパイラの仕組み，字句解析と構文解析の一般的な理論を中心に話題を厳選し，限られた授業時間で正確な理解と十分な技術を習得してもらうことを目標としている．2色刷．

実習Visual C++.NET
児玉靖司・小川久夫・入戸野健 共著
B5／208頁／本体2100円

半期・通年の講義に対応したテキスト．Cプログラミングにおいてビジュアルな部分を中心とし，コンソールプログラミング，さらに，C++プログラミングについても学べる．

数値計算
河村哲也 著
A5／約180頁／予価1700円

本書はコンピュータの本来の用途である数値計算の実際に使われている多くの計算法から，基本となるものおよび頻繁に使われるものを選び，出来る限りやさしく解説．本文は2色刷で，各項目を見開き2頁構成にし，わかりやすさに努めた．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学テキスト好評書より(1)

工科系の数学
マイベルク・ファヘンアウア共著／A5

1 数，ベクトル，関数	本体1700円
2 微分積分	本体1800円
3 線形代数	本体1800円
4 多変数の微積分	本体1800円
5 常微分方程式	本体2300円
6 関数論	本体2200円
7 フーリエ解析	本体1600円
8 偏微分方程式，変分法	本体1700円

ミュンヘン工科大学での基礎課程の講義をもとにつくられた，例，例題を多く含む教科書の翻訳．高見穎郎，薩摩順吉，及川正行訳．

基礎課程線形代数
吉野雄二著／A5／240頁／本体1700円
著者の講義経験が生かされ，授業の不足点を補うことができるよう構成された好個の教科・参考書となっている．

線形代数 増訂版
寺田文行著／A5／200頁／本体1262円
好評の前著「線形代数」をもとに，使い易さを中心に考え，内容を入れ替え，問題を難易別に配列した．

理工系 線形代数
水田義弘著／A5／216頁／本体1600円
自然科学等で広く利用されている応用例も加え，数学的なものの見方を身につけることに重点をおいたテキスト．2色刷．

Key Point & Seminar

工学基礎 線形代数
矢嶋徹・及川正行 共著／A5／264頁／本体1850円
例題の解答は計算式や計算の仕方が細かく書かれており，理解しやすい内容になっている．見開き構成．2色刷．

線形代数講義
金子晃著／A5／272頁／本体1850円
本書は理工系の大学基礎課程で線形代数学を一通り学ぶための教科・参考書である．高校の内容に無理なく繋がるよう，幾何学的説明を中心にわかりやすくまとめられている．

基礎 線形代数 [新訂版]
洲之内著／田中改訂／A5／192頁／本体1600円
定評ある旧版に，体裁面で大幅な変更を加え，見た目のわかりやすさも追求した．工科系の学生には最適のテキスト．

線形代数の基礎
寺田文行・木村宣昭共著／A5／176頁／本体1480円
左ページに解説，右ページにそれに関連した図や小問を配置するように配慮した．高校数学とのつながりにも配慮しわかりやすく解説．2色刷．

大学で学ぶ

線形代数
沢田・渡辺・安原共著／A5／128頁／本体1000円
理工系に限らず，社会科学系の入門者にも配慮した，コンパクトなテキスト・参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学テキスト好評書より(2)

数理系のための
基礎と応用 微分積分I, II
金子晃著／A5／I：256頁／本体1800円
II：280頁／本体1950円
レポートやプログラム，期末試験の問題と解答・講評などを盛り込んだ親しみやすいテキスト．

要説 わかりやすい微分積分
小川卓克著／A5／176頁／本体1600円
微分積分学を短時間で学ぶことを意図して書かれており，理論体系と推論の道筋は大方の教科書と変りなく，急いで概要を知りたい状況にも最適の好書．

改訂 微分積分
洲之内治男・和田淳蔵共著／A5／232頁／本体1280円
高校における数学教育を考慮し，例題等を厳選し，直観的理解を重視した改訂版．前著同様に1年間の講義用テキストとして章だてされている．

理工系のための
基礎と応用 微分積分
計算を中心に
山本昌宏著／A5／288頁／本体1850円
理工系の基礎として要求される微積分学の計算技術習得を目指している．

微分積分概説
長瀬・芦野共著／A5／256頁／本体1750円
まず概説的な形で微分積分の基本的な事柄を述べ，その後あらためて数学的に厳密に考えてみるよう章の配置を考慮した．2色刷．

入門微分積分
水田義弘著／A5／200頁／本体1700円
高校数学とのつながりに配慮し，証明の基本的なアイデアを読みとれるよう工夫．微分方程式や偏微分方程式についても解説．2色刷．

微分積分概論
越昭三監修／高橋・加藤共著／A5／224頁／本体1700円
豊富な例題や章末問題等は，実力の涵養に最適．偏微分法や重積分法まで十分にカバーした理工系の学生にとって格好の教科・参考書．

理工基礎 微分積分学I, II
I: 1変数の微積分　II: 多変数の微積分
足立恒雄著／A5／ I: 184頁／本体1600円
II: 192頁／本体1600円
1変数，および多変数の微分積分について基礎から丁寧にわかりやすく解説．

微分積分の基礎
寺田・中村共著／A5／208頁／本体1480円
高等学校の「数学II」までの知識で学ぶことができる．例や図を多用したわかりやすい解説．見開き体裁・2色刷．

大学で学ぶ
微分積分
沢田・渡辺・安原共著／A5／120頁／本体1000円
入門者が微分積分の世界に入りやすいように配慮し，基本的な定理・例題を扱った，テキスト・参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学テキスト好評書より(3)

微分方程式とその応用
［新訂版］

竹之内脩著／A5／240頁／本体1700円

理工系の学生・技術者を対象に微分方程式の物理・工学等への応用や，そのために不可欠なラプラス変換と演算子法についても詳しく解説してある．

微分方程式概説

岩崎千里・楳田登美男 共著

A5／224頁／本体1600円

種々のタイプの1階常微分方程式，2階線形常微分方程式に力点をおいて解説し，連立線形微分方程式，ラプラス変換については手短にまとめ，初歩的な偏微分方程式に触れている．

微分方程式の基礎

寺田文行著／A5／112頁／本体1200円

高校の新課程と学習の実態に配慮した微分方程式の入門書．具体例を多く用いて解説．完全見開き形式で見やすいことも特徴となっている．

理工系 複素関数論
多変数の微積分から複素解析へ

柴雅和著／A5／216頁／本体1600円

大学初年級向け教科・参考書．問題を通して「考え方の獲得」と「計算の練習」ができるよう配慮されている．

複素関数概説

今吉洋一著／A5／208頁／本体1600円

複素関数を複素変数のままで取り扱えるよう天下り的な議論を避け，理論の意味や発想，考え方が直観的に分かるよう説明．

新版 微分方程式入門

古屋茂著／A5／248頁／本体1400円

長年，微分方程式の平易な入門書として親しまれてきた前著の新版．応用面との関連を重視し，今回付章として新たに「ラプラス変換」を加えた．

基本 微分方程式

坂田泩 監修／曽布川拓也・伊代野淳 共著

A5／192頁／本体1600円

理論と例題が充実しており，入門から応用まで対応できる内容のテキストである．

複素関数概論

林・長坂 共著／A5／224頁／本体1600円

関数論は純粋数学から実用的な物理学，工学まで広い応用力をもっている．本書はそれらを考慮し，半期講義用にわかりやすくまとめた．

複素関数の基礎

寺田文行著／A5／168頁／本体1600円

左頁に解説，右頁に図やポイント，小問を配置する見開き形式で，関数論の基礎から応用まで1つ1つステップアップできる懇切丁寧なテキスト．

ベクトル解析入門

阿部龍蔵著／A5／128頁／本体1200円

物理学を学ぶために必要なベクトル解析を解説している．できるだけ途中の計算を省略せず理解しやすいよう配慮し，またレイアウトも工夫した．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学テキスト好評書より（4）

ベクトル解析の基礎
寺田文行・木村宣昭共著／A5／120頁／本体1250円
完全見開き形式となっているため見易く，また，図や例が豊富なので非常に理解し易いテキストとなっている．

フーリエ解析・ラプラス変換
寺田文行著／A5／112頁／本体1200円
フーリエ解析とラプラス変換を具体例や問などを豊富に用いて，各項目を見開き形式で簡潔かつわかりやすく解説．

フーリエ解析とその応用
洲之内源一郎著／A5／124頁／本体1480円
フーリエ解析を数学的厳密さを失わず平易に論じ，その応用として偏微分方程式の境界値問題の解法を中心に具体例を選びながら解説したテキスト．

集合と位相への入門
ユークリッド空間の位相
鈴木晋一著／A5／168頁／本体1650円
興味や必要に応じて学べるよう工夫し，問題には詳しい解答を付けた．

統計解析入門
篠崎信雄著／A5／312頁／本体2200円
慶應義塾大学総合政策学部での講義をもとにまとめられた入門テキスト．統計学の基本的な考え方を具体的な諸例を通して解説．

位相入門
距離空間と位相空間
鈴木晋一著／A5／160頁／本体1600円
ユークリッド空間の知識を礎に「距離空間」と「位相空間」を丁寧に解説した入門書．

理工基礎　確率とその応用
逆瀬川浩孝著／A5／200頁／本体1800円
日常よく耳にする話題を中心に興味をそそられる例を示し，考える力を養うことに主眼を置いた．

理工系　確率統計
中村忠・山本英二共著／A5／184頁／本体1450円
実際の現象をモデル化したり，解析できることを目標とし，例題や例を多く配置するなど工夫されている．

情報数学の基礎
寺田・中村・釈氏・松居共著／A5／176頁／本体1600円
高等学校「数学Ｉ」のみを履修していれば理解できるよう構成されている．各章を独立させ必要に応じて使い分けることができる．見開き形式．

多変量解析法入門
永田靖・棟近雅彦共著／A5／256頁／本体2200円
しっかりした理論を身につけるため，簡単な例を２次程度の行列でどのように解析を進めていくのかを丁寧に解説した好個の教科・参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学テキスト好評書より(2)

化学テキストより

日常の化学
—地球環境と生活様式の変革のために—
渡辺啓著／A5／224頁／本体1600円
大学・短大の初年級向で，化学と緑の薄い読者にも馴染みやすいテキスト．2色刷．

現代化学の基礎
物質科学へのアプローチ
渡辺啓著／A5／256頁／本体1800円
理工系学部等の基礎課程用テキストとして，のちの専門に関係するような題材を中心に要説した．

基礎 有機化学
大須賀篤弘・東田卓共著／A5／208頁／本体1850円
代表的な有機化合物に沿って，合成法，性質，関連の重要な概念を丁寧に解説．有機化学全般をコンパクトにまとめてあり，初学者がその大枠を理解するには好適のテキスト．

工学のための 有機化学
荒井貞夫著／A5／256頁／本体1800円
現在1200万以上の種類があり，年間10万の新しい種類が作りだされている有機化合物について，工科を専攻とする読者が学習するための教科書．

基礎 無機化学
花田禎一著／A5／232頁／本体1950円
大学ではじめて無機化学を学ぶ学生のために基礎を分かり易くまとめ，見開きに整理した好個の教科・参考書．

工学のための 無機化学
山下・片山・大倉・橋本共著／A5／216頁／本体1850円
工学分野に使われる内容の習得を目標にした教科書．基礎化学から多成分系化合物，無機材料までを分かりやすく解説．2色刷・見開き体裁．

工学のための分析化学
長島珍男著／A5／256頁／本体1900円
大学で化学を専攻する学部学生及び大学院生を対象とした分析化学の入門書．初学者にとって難解と思われる部分や数式的な表現を避け，わかりやすくまとめた好個の教科・参考書．

化学熱力学［新訂版］
渡辺啓著／A5／192頁／本体1650円
理工系の大学初年級，短大，高専，各種学校等の学生を対象に長年好評を博してきた「化学熱力学」の新訂版．

分析化学［新訂版］
綿抜邦彦著／A5／152頁／本体1500円
化学を十分に理解するまでに到っていない人々にも分かり易く解説．現代的な観点から，定評ある旧版を新訂．

基礎 物理化学
I：原子・分子の量子論／216頁
II：物質のエネルギー論／224頁
山内淳著／A5／本体各1900円
大学初学年級の学生を対象に物理化学の基礎を分かり易くまとめた．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

工学テキストより

機構学
森田鈞著／A5／160頁／本体1600円
機械は，抵抗力のある物体の組合せであり，その各部が行う限定された相対運動について学ぶのが機構学である．多数の図面を用いて丁寧に解説．

演習図学と製図
磯田浩・鈴木賢次郎共著／A5／34頁／本体880円
工業高専，短大，大学における技術基礎教育に対応して作成された図学の練習帳．ページの切りはなしを簡単にし，作図・提出の便宜を図っている．

工業熱力学の基礎
斎藤孟著／A5／264頁／本体2200円
工科系の高専・大学で熱力学を学ぼうとする学生向けに，高校の理科の知識と簡単な微積分の計算がわかれば理解できるよう配慮されたテキスト．

工学基礎図学と製図［新訂版］
磯田浩・鈴木賢次郎共著／A5／208頁／本体1480円
広く講義で使われてきた「工学基礎図学と製図」の新訂版．AutoCADの利用も配慮し，さらに2色刷とするなどより現代的に改訂した．

機械工学のための 振動・音響学
鈴木・西田・丸山・渡辺共著／A5／256頁／本体2300円
大学の機械工学系の3～4年生，工業高専の最上級生を対象とし，振動学・音響工学の基礎をしっかりと習熟できることに主眼をおいたテキスト．

演習機械振動学
佐藤・岡部・岩田共著／A5／200頁／本体1800円
機械力学，特に振動を中心としたダイナミックスについての基礎学力をつけるための演習書．質点及び剛体の力学の基礎からはじめている．

機械力学入門
辻岡康著／A5／192頁／本体1600円
機械力学とは機械に関する動力学の問題を扱う学問である．この入門書では，線形系の振動から始め，回転機械・往復機械の動力学までを解説する．

演習 機械運動学
高野政晴・遠山茂樹共著／A5／248頁／本体2524円
ロボットの機構など，時代の要請にも即した新鮮な内容をもり込み，豊富な図で解説した演習書．要項・例題を頁単位で配し，学習の便宜をはかる．

演習 材料力学［新訂版］
尾田十八・三好俊郎共著／A5／224頁／本体1980円
長い間好評を得てきた「演習材料力学」を現在の事情を考慮し，単位系はSIを中心とした解説に改め，解答もより明快にした．2色刷．

演習振動・波動論
徳岡・杉山・松本共著／A5／216頁／本体2233円
工学の諸分野で基礎となる振動現象と波動現象の本質と解析方法が頁単位の演習書形式で総合的に学べるよう配慮された好個の書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(1)

最新・情報処理のしくみ
コンピュータシステムとネットワーク利用
太田忠一・古殿幸雄 共編著
B5／216頁／本体1900円
大学初学年の学生，社会人初心者向けの入門書.

文科系のための
コンピュータ リテラシ
[第3版]
Microsoft Officeによる
太田忠一編／植松康祐・草薙信照共著
B5／280頁／本体1900円
ワープロと表計算を中心に平易に解説.

情報リテラシ I, II
I：〈Word〉基礎から実践まで
II：〈Excel〉基礎から実践まで
尾崎正弘・足達義則 共編著
B5／各152頁／本体各1650円
各章末の演習問題は，検定試験に対応している.

実習Excelによる表計算
入戸野健・柴田博共著／B5／200頁／本体1450円
基本的な操作から，関数の利用，グラフの作成など，多数の例を用いて解説．進んだ利用法も具体的な例を用いて学ぶ.

コンピュータサイエンスのための
離散数学
守屋悦朗著／A5／240頁／本体2400円
理論的コンピュータサイエンスの各分野で必要な斯学の中から特に基礎的事項を取り上げる.

計算理論とオートマトン言語理論
コンピュータの原理を明かす
丸岡章 著／A5／288頁／本体2000円
図や例題を多用し，直観的に分かるよう工夫した.

オートマトン言語理論 計算論 I, II
[第2版]
J.E.ホップクロフト他著／野崎昭弘 他訳
A5／I：352頁／本体2800円
II：256頁／本体2600円
入門書として高い評価を得ている書の邦訳.

計算機科学入門
M.A.アービブ・A.J.クフォーリ・R.N.モル共著
甘利・金谷・嶋田共訳／A5／248頁／本体2524円
オートマトンの理論，PascalとLispの入門書，論理回路，ブール代数などをわかりやすく解説した.

教養としての
コンピュータ・サイエンス
渡辺治著
B5／160頁／本体1550円
いくつかの話題を楽しく読み進められるよう工夫．大学1年生を対象とした好個のテキスト．2色刷.

新・コンピュータ解体新書
清水忠昭・菅田一博共著／A5／256頁／本体1600円
好評を博した前著にインターネットの項目を加え，より「やさしく」「わかりやすく」，自然に理解できるよう図を多用し，丁寧に解説.

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(2)

ハードウェア入門
柴山潔著／A5／160頁／本体1400円
現代のコンピュータシステムの主要なハードウェア機構を構成するプロセッサ，メインメモリ，及び周辺装置の各機能やそれらの分担方式について明らかにする．

改訂 FORTRAN77
大駒誠一著／A5／280頁／本体1700円
例題ごとにいくつかのプログラムを提示し解説を施すというスタイルで，短期間に一定のレベルに達したいという初学者に最適．好評書の改訂版．

ザ・FORTRAN77
戸川隼人著／A5／152頁／本体1408円
計算機科学の教育に経験豊かな著者が，すぐに使えるFORTRANのプログラミングの方法を解説．わかりやすさを重視して書かれている．２色刷．

Fortran 77プログラミング
原田賢一著／A5／324頁／本体1650円
実践的な例題を豊富に使用して，アルゴリズムや計算手順など考え方を丁寧に説明．流れ図やプログラム，重要なポイントは２色刷の見やすい構成．

ザ・Fortran90/95
戸川隼人著／A5／216頁／本体1750円
数値計算に適した言語として広く使われているFortranの最新仕様に即した入門書．本書では新しい要素を十分に活かし，入門者ができるだけ短時間で理解できるように書かれている．２色刷．

演習と応用 FORTRAN 77
戸川隼人著／A5／248頁／本体1806円
実際に書いて「体で覚える」ように応用に重点をおいた演習書．例題を通して数値計算・統計解析・事務処理などの概要を理解することができる．

COBOLの基礎と応用
JIS1992年版準拠
大駒誠一著／A5／216頁／本体1450円
初心者がCOBOLのプログラムを書けるようになることを目標に，実践に即し整理された入門書．

ザ・PASCAL
戸川隼人著／A5／196頁／本体1700円
プログラミング言語教育にとって最近とみにその重要性が指摘されるPascalの要所をあます所なく解説する．例題は有限要素法まで扱う．２色刷．

Pascalプログラミングの基礎
真野芳久著／A5／280頁／本体1900円
プログラミングの初心者を対象に，例題を通した説明を行った．誤りないプログラミングのための知識，手法，プログラムの構成法なども紹介．

Pascal 入門
古郡廷治著／A5／240頁／本体2300円
人文系・理工系という垣根を取り払って，幅広い分野の読者層を対象とし，わかりやすくPascalプログラミングの「作法」を伝えた入門書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(3)

やさしく学べる
C言語入門
基礎から数値計算入門まで
皆本晃弥著／B5／240頁／本体2400円
各章の頁数，内容の取捨選択，演習問題等，大学や高専での講義に利用しやすい構成となっている．

演習と応用C
玉井浩著／A5／192頁／本体1700円
C言語の初心者から，文法を一通り学んだ読者までを対象に，主としてプログラムを作る問題を精選した．C言語はANSI仕様に準拠．

C言語のススメ
Cで始めるプログラミング
清水忠昭・菅田一博共著／B5／336頁／本体2300円
Cプログラミングの基本的考え方や文法の意味を丁寧に解説．初歩でつまずいている人におすすめ．

ザ・C［第２版］
――ANSI C準拠――
戸川隼人著／A5／272頁／本体1750円
C言語を学ぼうとする人の立場にたって，他のプログラミング言語をまったく知らなくても十分C言語が理解できるよう特に基礎的な部分を充実させた．

LEDAで始める
C/C++プログラミング
入門からコンピュータ・ジオメトリまで
浅野哲夫・小保方幸次 共著／A5／272頁／本体2600円
C++のクラスライブラリ「LEDA」を使ったプログラミングの入門書．

Cプログラミングの基礎
蓑原隆著／A5／192頁／本体1600円
見開き体裁で，学習しやすく工夫されており，広くおすすめできる教科・参考書．

オペレーティングシステム概説
その概念と構造
谷口秀夫著／A5／160頁／本体1450円
主にOSの「概念」を解説しながら,「構造」についても紹介し，単なる細かな操作や機能の知識ではなく相互の関連を解説した．

オペレーティングシステムの基礎
大久保英嗣著／A5／184頁／本体1600円
多様なオペレーティングシステムに共通する基本的な概念や技法に重点をおいて説明．

Linux/FreeBSD/Solarisで学ぶ
UNIX
基本操作からフリーソフトのコンパイル/インストールまで
皆本晃弥著／B5／224頁／本体2300円
これからUNIXを学ぼうとする人に最適の書．

ザ・Linux
戸川隼人 著／A5／168頁／本体1600円
第2のコンピュータリテラシとして書かれたLinuxのテキスト．GUI利用をするWindowsに近い操作と，伝統的なLinuxの操作法を併記した．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(4)

Javaによる
プログラミング入門
権藤克彦著／A5／224頁／本体1850円
初めてプログラミングを学ぶ人のための入門書．言語はプログラミング言語として洗練されているJavaを選択．見開き体裁で読みやすい構成．

ザ・Java2
対話的に動くホームページの作成技術
戸川隼人著／A5／200頁／本体1800円
半期の授業でJavaの初歩を教えるためのテキスト．独習用としても使える．

ザ・Visual Basic
戸川隼人著／A5／264頁／本体1850円
変数や関数，制御構造，ファイル入出力などのプログラミングの基本はもちろん，構造体，クラス，タイプなど高度な技術も解説．２色刷．

実習Visual Basic .NET
だれでもわかるプログラミング
林直嗣・室井勝子・鈴木三枝子 共著
B5／200頁／本体1900円
着実に理解を深めるために豊富な例題，練習問題を用意した．2色刷．

演習と応用 Java
戸川隼人著／A5／232頁／本体1900円
プログラミング言語初心者も念頭においた，アプレットの基本的な書きかたを短期間で学べる演習中心のテキスト．GUIや画像，音声まで，ひととおりの機能が約4ヶ月で学べる．

ネットワーク利用の基礎 [新訂版]
インターネットを理解するために
野口健一郎著／A5／216頁／本体1850円
技術の発展を反映した，見開き体裁で分かりやすく解説された好個の教科・参考書．

ザ・数値計算リテラシ
―C&FORTRANによる―
戸川隼人著／A5／160頁／本体1480円
代表的なアルゴリズムをわかりやすく説明した，応用力を養える好個のテキスト．

数値解析入門 [増訂版]
山本哲朗著／A5／288頁／本体2000円
好評を得てきた「数値解析入門」の増訂版．さらに幾つかの現代的数値計算法を取り上げた．学生，技術者，研究者に好適な教科，参考書．

Fortran 95, C&Javaによる 新数値計算法
―数値計算とデータ分析―
小国力著／A5／328頁／本体2200円
数値計算の基本を実務的な視点に立って広い観点から解説．

C言語による
数値計算入門
解法・アルゴリズム・プログラム
皆本晃弥著／B5／240頁／本体2400円
大学・短大・高専等における講義用，あるいは独習用の入門書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社